Massimo Bergamini   Anna Trifone   Graziella Barozzi

Matematica.blu 2.0

Esponenziali e logaritmi

N

ZANICHELLI

Realizzazione editoriale:
- Coordinamento redazionale: Marinella Lombardi
- Redazione: Valentina Franceschi, Marinella Lombardi
- Collaborazione redazionale: Massimo Armenzoni, Parma
- Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini
- Progetto grafico: Byblos, Faenza
- Progetto grafico delle pagine V-VIII: Roberto Marchetti
- Composizione e impaginazione: Litoincisa, Bologna
- Ricerca iconografica e realizzazione delle aperture di capitolo e di *Realtà e modelli*: Byblos, Faenza
- Disegni: Graffito, Cusano Milanino
- Correzione di bozze: T2, Bologna

Contributi:
- Stesura delle aperture: Daniela Cipolloni (*Made in…*), Daniele Gouthier (*La rete di Sant'Antonio*, *I tronchi degli alberi*, *Lo spazio di frenata*, *L'ellisse del giardiniere*, *Le torri di raffreddamento*, *Rotolare per misurare*), Stefania Varano (*I chicchi e la scacchiera*)
- Stesura delle schede di *Esplorazione*: Daniela Cipolloni (*Le fibre ottiche*), Daniele Gouthier (*Noleggiare film*, *I robot cartesiani*, *Eratostene e il meridiano terrestre*, *L'ellisse in architettura)*, Chiara Manzini (*Astri, seni, coseni, tangenti*), Elisa Menozzi (*Proietti, satelliti e comete*, *L'inafferrabile pi greco*, *Da quantità silvestri a numeri immaginari*), Ilaria Pellati (*La crittografia*, *Le coniche di Apollonio*)
- Stesura dei testi e degli esercizi del *Laboratorio di matematica*: Antonio Rotteglia
- Stesura e revisione degli esercizi in lingua inglese: Andrea Betti
- Revisioni dei testi e degli esercizi: Chiara Ballarotti, Luca Malagoli, Elisa Menozzi, Monica Prandini
- Rilettura dei testi: Marco Giusiano, Luca Malagoli, Francesca Anna Riccio
- Risoluzione degli esercizi: Silvano Baggio, Francesco Benvenuti, Davide Bergamini, Angela Capucci, Elisa Capucci, Lisa Cecconi, Elisa Garagnani, Daniela Giorgi, Erika Giorgi, Cristina Imperato, Francesca Incensi, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Elisa Menozzi, Monica Prandini, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa, Ambra Tinti
- Stesura degli esercizi: Graziella Barozzi, Anna Maria Bartolucci, Davide Bergamini, Cristina Bignardi, Francesco Biondi, Lisa Cecconi, Chiara Cinti, Paolo Maurizio Dieghi, Daniela Favaretto, Rita Fortuzzi, Ilaria Fragni, Lorenzo Ghezzi, Chiara Lucchi, Mario Luciani, Chiara Lugli, Francesca Lugli, Armando Magnavacca, Elisa Menozzi, Luisa Morini, Monica Prandini, Tiziana Raparelli, Laura Recine, Daniele Ritelli, Antonio Rotteglia, Giuseppe Sturiale, Renata Tolino, Maria Angela Vitali, Alessandro Zagnoli, Alessandro Zago, Lorenzo Zordan
- Stesura dei problemi di *Realtà e modelli*: Daniela Boni, Maria Falivene, Nadia Moretti
- Revisione didattica del testo (*Diary revision*): Eleonora Basile, Maria Alberta Bulgaro, Laura Caliccia, Anna Maria Logoteta, Alvisia Marcantonio, Lucia Nasoni, Mariapia Riva

L'intera opera è frutto del lavoro comune di Massimo Bergamini e Anna Trifone. Hanno collaborato alla realizzazione di questo volume Davide Bergamini e Enrico Bergamini.

Copertina:
- Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
- Realizzazione: Roberto Marchetti
- Immagine di copertina: Artwork Miguel Sal & C., Bologna

Prima edizione: gennaio 2011

L'impegno a mantenere invariato il contenuto di questo volume per un quinquennio (art. 5 legge n. 169/2008) è comunicato nel catalogo Zanichelli, disponibile anche online sul sito www.zanichelli.it, ai sensi del DM 41 dell'8 aprile 2009, All. 1/B.

File per diversamente abili
L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader.
Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito www.zanichelli.it/diversamenteabili

Suggerimenti e segnalazione degli errori
Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

lineauno@zanichelli.it

Le correzioni di eventuali errori presenti nel testo sono pubblicati nella sezione *errata corrige* del sito dell'opera (www.online.zanichelli.it/bergaminitriennio)

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2008

SOMMARIO

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

VI: pcandweb.myblog.it;
VII (a): Frans Hals, Cartesio. ca. 1649-1700. Parigi, Musée du Louvre;
VII (b): mathdl.maa.org;
VII (c): Klaus Wohlfahrt, owpdb.mfo.de;
VIII: Vasilij Kandinskij, Improvvisazione 33, 1913. Amsterdam, Stedelijk Museum;
553, 576 (a): Lars Christensen/Shutterstock, Ljupco Smokovski/Shutterstock;
576 (b): Tiziano, *Miracolo del neonato parlante*, Scoletta del Santo, Padova;
628 (a): www.camlab.co.uk;
628 (b): Kiyok.

Dai numeri alle strutture algebriche

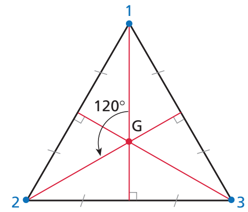
? **Le proprietà delle operazioni fra numeri possono essere estese a enti diversi?**

Algebra: non solo numeri

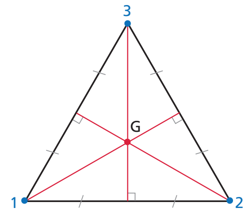
Le trasformazioni del triangolo equilatero in sé

Consideriamo un triangolo equilatero di vertici 1, 2, 3 e il suo centro G, punto di intersezione degli assi (figura 1).
Muoviamo il triangolo con una rotazione antioraria R_1 di 120° intorno a G: il vertice 3 si sposta nel vertice 1, il vertice 1 in 2 e 2 in 3 (figura 2). R_1 trasforma il triangolo equilatero in sé e può essere indicata mediante la permutazione dei vertici che la caratterizza con la scrittura:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



▲ **Figura 1**



▲ **Figura 2**

Consideriamo ora tutte le trasformazioni geometriche che mutano il triangolo equilatero in sé:

- S_1 = simmetria rispetto all'asse del lato 2-3;
- S_2 = simmetria rispetto all'asse del lato 3-1;
- S_3 = simmetria rispetto all'asse del lato 2-1;
- R_1 = rotazione in senso antiorario di 120° intorno a G;
- R_2 = rotazione in senso antiorario di 240° intorno a G;
- I = identità (o rotazione di 360° intorno a G).

Le sei trasformazioni corrispondono alle sei permutazioni dei vertici del triangolo equilatero.

Il concetto di permutazione non riguarda soltanto i numeri, ma si può definire per oggetti qualsiasi. Le permutazioni di n oggetti distinti sono tutti i possibili ordinamenti di quegli oggetti.

Attività

Con un cartoncino realizza un triangolo equilatero come quello della figura e fai un po' di pratica nell'ottenere le trasformazioni elencate. Scrivi poi la permutazione relativa, nella forma che abbiamo utilizzato per quella di R_1.

Per esempio, verifica che $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ corrisponde a R_2.

Un esempio di permutazioni sono gli anagrammi. Gli anagrammi della parola EVA sono EVA, EAV, VEA, VAE, AEV, AVE. Le permutazioni di tre elementi sono 6.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

Dai numeri alle strutture algebriche

Un'operazione fra trasformazioni

Consideriamo l'operazione di composizione $\circ$ tra le trasformazioni elencate.
Indichiamo con T l'insieme delle sei trasformazioni.
È possibile verificare che $\circ$ è un'operazione interna: comunque si compongano due elementi di T, si ottiene ancora un elemento di T.

Attività

Considera ancora il triangolo di figura 1 ed esegui prima la simmetria S_1 e poi applica al triangolo ottenuto la rotazione R_2, ossia esegui $R_2 \circ S_1$.
$R_2 \circ S_1$ è uguale a un'altra delle sei trasformazioni. Quale?
Completa la tabella dell'operazione $\circ$.

$\circ$	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
I	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2				
R_2	R_2					
S_1	S_1					
S_2	S_2					
S_3	S_3					

La struttura di gruppo, insieme ai concetti di simmetria e di permutazione, venne utilizzata per la prima volta da Évariste Galois (1811-1832) per studiare le soluzioni delle equazioni polinomiali. Tuttavia, soltanto alla fine del XIX secolo, Arthur Cayley diede la definizione generale di gruppo.

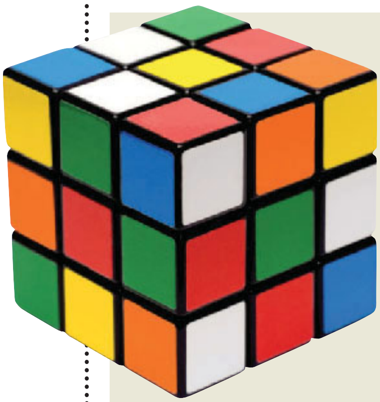
La struttura di gruppo

Dato un insieme A e una legge di composizione interna #, definita fra gli elementi di A, si dice che $(A, \#)$ è una struttura di gruppo se:

a) # è *associativa*, cioè $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$ per ogni a, b, c di A;
b) esiste l'elemento neutro e di A tale che $a \# e = e \# a = a$ per ogni a di A;
c) per ogni a di A esiste l'elemento inverso a^{-1} di A tale che $a \# a^{-1} = a^{-1} \# a = e$.

Attività

- Verifica che $(\mathbb{Z}, +)$, dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi e $+$ l'operazione di addizione, è una struttura di gruppo. In particolare: qual è l'elemento neutro? Assegnato un numero intero a, qual è il suo inverso?
- Verifica che la struttura $(T, \circ)$, dove T è l'insieme delle trasformazioni del triangolo equilatero in sé e $\circ$ la loro legge di composizione, è una struttura di gruppo. In particolare, determina l'elemento neutro della struttura e, per ogni trasformazione, la sua inversa. Per esempio, l'inversa di S_3 è ancora S_3, perché $S_3 \circ S_3 = I$.

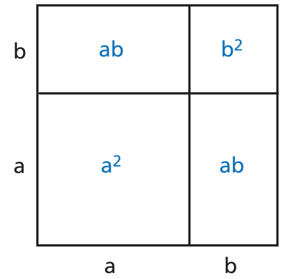


Il cubo di Rubik può essere studiato matematicamente. Chiamiamo *mossa base* la rotazione di 90° in senso orario di una faccia: le mosse base sono in totale sei. Si può passare da una all'altra delle 43 252 003 274 489 856 000 permutazioni possibili del cubo mediante la composizione di un numero finito di mosse base. In questo caso si dice che le mosse base *generano* l'insieme M di tutte le possibili mosse del cubo. L'insieme delle mosse M e l'operazione di composizione fra mosse costituiscono una struttura di gruppo.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

Una matematica in evoluzione

I Greci Per i Greci l'algebra aveva senso soltanto se era interpretabile geometricamente. Ecco come Euclide (vissuto intorno al 300 a.C.) scrive l'identità $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, che noi interpretiamo geometricamente come nella figura 3:
«Se si taglia a caso una linea retta, il quadrato del tutto è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo contenuto dalle parti».



◀ Figura 3

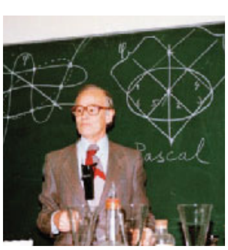
Gli Arabi Insieme ai Cinesi e agli Indiani, gli Arabi hanno dato un grosso contributo allo sviluppo dell'algebra. Al-Khuwarizmi (vissuto nel IX secolo d.C.) ha fornito una trattazione dettagliata delle equazioni di secondo grado e l'uso sistematico di passaggi algebrici nel suo testo *Hisab al-jabr w'al-muqabala*. Come vedi dal titolo, la parola algebra è proprio di origine araba. Altri contributi sono di Al-Karaji (953-1029) e Al-Samawal (duecento anni dopo) che si dedicarono, in particolare, allo studio dei monomi e dei polinomi.

Gli Italiani Importante è anche il contributo degli algebristi italiani del Cinquecento e in particolare di Girolamo Cardano e Nicolò Tartaglia, che affrontarono la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, e di Raffaele Bombelli, che contribuì alla diffusione dell'*algebra sincopata* (un'algebra con parole abbreviate al posto delle variabili e delle operazioni).

Cartesio Solo con Cartesio (1596-1650) l'algebra inizia ad affrancarsi dall'interpretazione geometrica, riuscendo, in tal modo, a dare nuove idee alla stessa geometria. Cartesio scrive che, volendo studiare le matematiche, si rese conto che per «studiarle in particolare» doveva «raffigurarle in forma di linee», ma per «comprenderne molte insieme» doveva invece «esprimerle con qualche cifra fra le più brevi possibili».

Nel XVIII secolo inizia a farsi strada l'idea di un'algebra come scienza di quantità generiche, una sorta di aritmetica generalizzata, quindi utile a rappresentare e dimostrare proprietà fra numeri e proprietà delle operazioni fra essi.

Peacock Nel XIX secolo, il matematico inglese Peacock afferma che l'algebra non deve essere ridotta a una semplice generalizzazione dell'aritmetica: «Nell'algebra aritmetica le definizioni delle operazioni determinano le regole; nell'algebra simbolica le regole determinano il significato delle operazioni». Questa impostazione apre definitivamente la strada all'algebra come scienza astratta.



Noether e Van der Waerden Nel 1930 il matematico Van der Waerden, allievo di Emmy Noether, scrive il libro *Modern Algebra* in cui afferma che «l'indirizzo astratto, formale o assiomatico, cui l'algebra deve il suo rinnovato sviluppo, ha condotto a una serie di concetti nuovi e alla considerazione di nuove connessioni e di fecondi risultati».

Per il carattere innovativo dei suoi studi di algebra, la matematica tedesca di origini ebree Emmy Noether viene spesso chiamata «la mamma dell'algebra moderna».

Dai numeri alle strutture algebriche

Bourbaki Lo sviluppo delle conoscenze matematiche nel secolo XX è stato talmente imponente che alcuni matematici hanno avvertito il bisogno di cercare di individuare concetti unificanti che potessero aiutare a gestire la complessità e l'eccessiva ricchezza dei diversi campi di ricerca. Proprio quell'idea espressa da van der Waerden, ossia la considerazione di «nuove connessioni» fra le varie teorie, porta, intorno agli anni '30 del secolo XX, un gruppo di giovani e brillanti matematici, che si presentano con lo pseudonimo collettivo di Bourbaki, a individuare nel concetto di struttura uno strumento per trattare in modo unitario le conoscenze matematiche. Capire la matematica vuol dire, secondo i bourbakisti, coglierne il suo aspetto strutturale: la ricerca matematica diventa quindi ricerca di strutture nascoste, sempre più generali e astratte.

Nel XX secolo anche altre discipline hanno percorso la strada dello studio delle relazioni indipendenti dagli oggetti descritti. Un giorno, a Monaco, racconta Kandinsky,

«aprendo la porta dello studio, vidi dinnanzi a me un quadro indescrivibilmente bello. All'inizio rimasi sbalordito, ma poi mi avvicinai a quel quadro enigmatico, assolutamente incomprensibile nel suo contenuto e fatto esclusivamente di macchie di colore. Finalmente capii: era un quadro che avevo dipinto io e che era stato appoggiato al cavalletto capovolto [...] Quel giorno mi fu perfettamente chiaro che l'oggetto non aveva posto, anzi era dannoso ai miei quadri».

Vassily Kandinsky, Improvvisazione 33, 1913.

Attività

Il concetto di struttura in matematica e le sue applicazioni in altre discipline: sviluppa questo tema, realizzando, come sintesi, una presentazione multimediale.

Le forme dei cerchioni dei pneumatici delle automobili possono essere studiati mediante i concetti di simmetria e di gruppo. Ne puoi trovare esempi come quello della figura in www.matematita.it.

Da leggere:

- Giuliano Spirito, *Matematica senza numeri*, Newton Compton, 2004.
- Ian Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi, 2008.
- Keith Devlin, *Il linguaggio della matematica*, Bollati Boringhieri, 2002; capitolo: La matematica della bellezza.

Cerca nel Web:

algebra astratta, strutture algebriche, algebra Boole, Klein programma Erlangen, gruppo rosoni, cristalli

CAPITOLO

9

९ [numerazione araba]

९ [numerazione devanagari]

九 [numerazione cinese]

ESPONENZIALI E LOGARITMI

LA RETE DI SANT'ANTONIO Ti arriva una lettera dal tuo amico Elio con una lista di cinque nomi: 1. Ada; 2. Bruno; 3. Carla; 4. Davide; 5. Elio. Tu devi spedire a ciascuno di loro 10 euro, cancellare il nome di Ada e scrivere in fondo alla lista il tuo: 1. Bruno; 2. Carla; 3. Davide; 4. Elio; 5. IL TUO NOME. Poi devi fotocopiare la lettera e spedirla a cinque tuoi amici o conoscenti. Ora non ti resta che aspettare e, come tu hai spedito 10 euro alle persone in lista, così inizieranno ad arrivarne a te: in poco tempo rientreranno i tuoi 50 euro e ne riceverai addirittura altri 39 000... In realtà le cose non stanno così. Hai avuto la fortuna (o la sfortuna!) di essere coinvolto in una catena di Sant'Antonio.

Perché le catene di Sant'Antonio non funzionano?

▶ **La risposta a pag. 576**

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Le potenze con esponente intero o razionale

Riassumiamo nelle tabelle seguenti le definizioni, già note, relative alle potenze di un numero reale con esponente intero o razionale e le proprietà delle potenze.

Le potenze con esponente intero		
a^x se…	…è definita per…	Esempio
$x > 0$	$\forall\, a$	$(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$; $0^3 = 0$.
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$; 0^0 non si definisce.
$x < 0$	$a \neq 0$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

▲ Tabella 1

Le potenze con esponente razionale		
a^x se…	…è definita per…	Esempio
$x > 0$	$a \geq 0$	$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$; $0^{\frac{1}{2}} = 0$.
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$; 0^0 non si definisce.
$x < 0$	$a > 0$	$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

▲ Tabella 2

Osserviamo che l'introduzione degli esponenti razionali richiede che **la base delle potenze non possa essere negativa**. In caso contrario si avrebbero situazioni non accettabili come quella del seguente esempio.

ESEMPIO

Supponiamo che la base di una potenza possa essere negativa. Allora possiamo scrivere:

$$-125 = (-5)^3 = \{[(-5)^3]^{\frac{1}{2}}\}^2 = \{[(-5)^3]^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^6} = \sqrt{5^6} = 125.$$

Ma -125 non è uguale a 125!

Le potenze con esponente reale

È possibile definire una potenza con esponente non razionale?

Una scrittura come $3^{\sqrt{2}}$ ha significato?

Sappiamo che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè un numero decimale illimitato non periodico. Esso può essere approssimato per eccesso o per difetto da due successioni di numeri decimali finiti.

1,4	1,41	1,414	1,4142	…	per difetto
1,5	1,42	1,415	1,4143	…	per eccesso

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

Indicato con a_n il termine generico di indice n della prima successione e con b_n quello della seconda successione, sono vere le seguenti proprietà:

- $a_n < b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
- fissato $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}$, è sempre possibile trovare $\overline{n}$ tale che $\forall\, n > \overline{n}$ si ha:

  $b_n - a_n < \varepsilon.$

● Con ε indichiamo un numero preso piccolo quanto vogliamo.

La seconda proprietà dice che i termini delle due successioni si avvicinano sempre di più all'aumentare di n.

Infatti, fissato $\varepsilon = 0{,}01$, è sufficiente considerare $\overline{n} = 2$. Per $n > 2$, $b_n - a_n < 0{,}01$. Analogamente, fissato $\varepsilon = 0{,}001$, si può considerare $\overline{n} = 3$. Per $n > 3$, $b_n - a_n < 0{,}001$ e così via.
È proprio questo avvicinamento sempre maggiore che permette di definire il numero $\sqrt{2}$.

Consideriamo ora le due seguenti successioni di potenze con base 3 e con esponenti razionali uguali ai termini delle precedenti successioni:

$$3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad \ldots$$

$$3^{1,5} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,4143} \quad \ldots$$

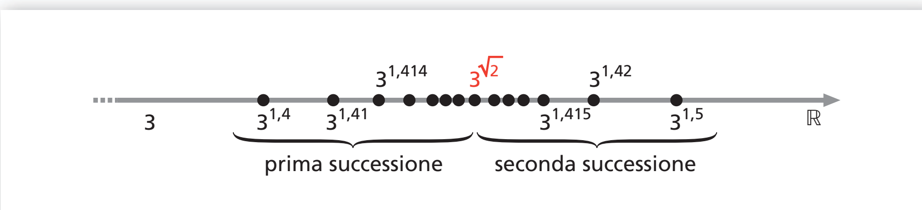
Anche in questo caso si può verificare che:

- i termini della seconda successione sono maggiori dei termini della prima con lo stesso indice;
- i termini delle due successioni si avvicinano sempre più all'aumentare dell'indice.

● Questa proprietà è vera anche se al posto di 3 consideriamo, come base, un qualsiasi numero maggiore di 1.

Possiamo allora utilizzare le due successioni per definire $3^{\sqrt{2}}$ come il numero reale approssimato dalla prima successione per difetto e dalla seconda per eccesso:

$$3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < \ldots < 3^{\sqrt{2}} < \ldots < 3^{1,4143} < 3^{1,415} < 3^{1,42} < 3^{1,5}.$$



◄ **Figura 1** **Se rappresentiamo le successioni approssimanti sulla retta reale, vediamo che i punti relativi alla prima successione si avvicinano sempre di più a un punto da sinistra senza mai oltrepassarlo, quelli relativi alla seconda si avvicinano allo stesso punto da destra senza mai oltrepassarlo. Associamo a tale punto il numero $3^{\sqrt{2}}$.**

In generale, si definisce la **potenza a^x di un numero reale a, con $a > 1$ e con esponente reale $x > 0$**, come quell'*unico* numero reale:

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso.

In maniera analoga si ragiona quando $0 < a < 1$, ma tenendo conto che in questo caso al crescere degli esponenti che approssimano x le potenze decrescono, mentre al decrescere degli esponenti le potenze crescono.

● Questa proprietà è vera ogni volta che la base di una potenza è compresa fra 0 e 1. Per esempio:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Quindi si definisce la **potenza a^x di un numero reale a, con $0 < a < 1$ e con esponente reale $x > 0$**, come quell'*unico* numero reale:

Calcola le successioni che approssimano $(0,2)^{\sqrt{2}}$. Che differenza noti tra queste e quelle che approssimano $3^{\sqrt{2}}$?

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto.

Si definisce poi:

- $\mathbf{1}^x = \mathbf{1}$ per qualunque reale x;
- $\mathbf{0}^x = \mathbf{0}$ per qualunque reale x positivo;
- $\boldsymbol{a}^0 = \mathbf{1}$ per qualunque reale a positivo;
- se l'esponente è negativo:

$$\boldsymbol{a}^{-r} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right)^r = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^r} \text{ per qualunque reale } a \text{ positivo (con } r > 0).$$

Non si definiscono invece:

0^0 non è definita, così come 0^{-2}.

- le potenze con base zero ed esponente nullo o negativo;
- le potenze con base un numero reale negativo.

Ci limiteremo a studiare le potenze a^x con base reale $a > 0$, che sono le sole a essere definite con esponente x reale qualsiasi. Con tale condizione, essendo la base a positiva, il valore della potenza è sempre positivo:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^x > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Le proprietà delle potenze con esponente reale

Si può dimostrare che anche per le potenze con esponente reale valgono le cinque proprietà note delle potenze a esponente razionale; le riassumiamo nella tabella 3.

▼ **Tabella 3**

Le proprietà delle potenze	
Definizione $a, b \in \mathbb{R}^+, \quad x, y \in \mathbb{R}$	**Esempio**
I. Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$10^{4\sqrt{3}} \cdot 10^{-\sqrt{27}} = 10^{\sqrt{3}}$
II. Quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
III. Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(6^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
IV. Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^\pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^\pi$
V. Quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$	$\left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Inoltre vale il seguente teorema.

TEOREMA

All'aumentare dell'esponente reale x, la potenza a^x:

- aumenta se $a > 1$, cioè
- diminuisce se $0 < a < 1$, cioè

$$a > 1, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2};$$
$$0 < a < 1, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

ESEMPIO

Fissati i due esponenti 5 e $\sqrt{3}$, poiché $5 > \sqrt{3}$ risulta:

$2^5 > 2^{\sqrt{3}}$, essendo la base 2 maggiore di 1, e

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$, essendo la base $\frac{1}{2}$ minore di 1.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

DEFINIZIONE

Funzione esponenziale

Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

$$y = a^x, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+.$$

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, il codominio è $\mathbb{R}^+$.

Pertanto, fissato un numero $a > 0$, la funzione esponenziale di base a è così definita:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f: x \mapsto a^x.$$

Abbiamo una diversa funzione esponenziale per ogni valore $a > 0$ che scegliamo.

Studiamo il grafico della funzione $y = a^x$ nei seguenti tre casi:

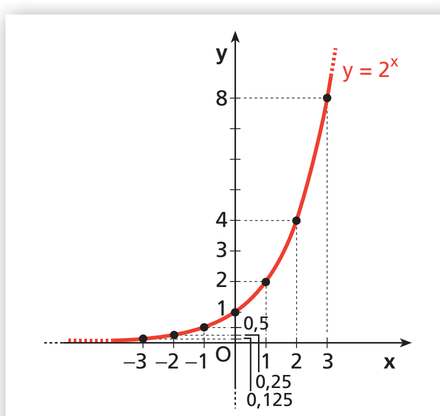
$$a > 1, \quad 0 < a < 1, \quad a = 1.$$

Il grafico della funzione esponenziale $y = a^x$ è detto *curva esponenziale*.

Primo caso: $a > 1$

Scegliamo, per esempio, $a = 2$; la funzione da studiare è $y = 2^x$. Il suo grafico è rappresentato in figura 2, insieme alla tabella dei punti utilizzati per costruirlo.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



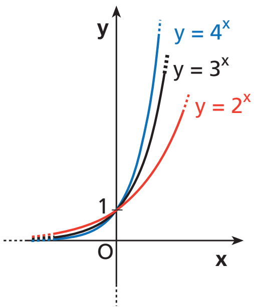
◀ **Figura 2** Il grafico di $y = 2^x$.

Poiché 2^x è positivo per qualunque valore di x, il grafico della funzione esponenziale

$$y = 2^x$$

si trova interamente «sopra» l'asse x. Inoltre esso:

- interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$;
- non interseca mai l'asse x, perché non esiste alcun valore di x tale che risulti $2^x = 0$;
- ha andamento crescente: al crescere dell'esponente cresce il valore della potenza;
- per esponenti negativi decrescenti le potenze si avvicinano sempre più a 0 (si scrive anche $2^x \to 0$ per $x \to -\infty$ e si legge: 2^x tende a 0 per x che tende a meno infinito).



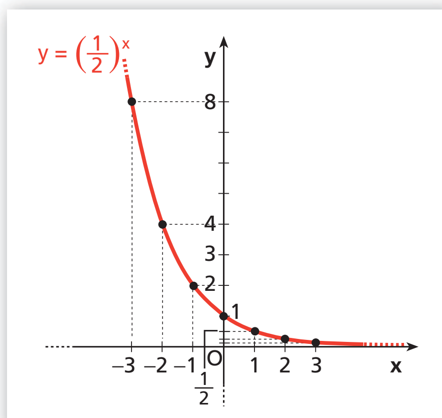
I grafici delle funzioni esponenziali con basi $a > 1$ hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione $y = 2^x$ (figura a lato).

Secondo caso: $0 < a < 1$

Scegliamo, per esempio, $a = \frac{1}{2}$: la funzione da studiare è $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Il suo grafico è rappresentato in figura 3, insieme alla tabella dei punti utilizzati per costruirlo.

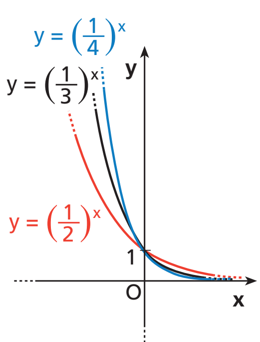
▶ **Figura 3** Il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è positivo per qualunque valore di x, il grafico si trova interamente «sopra» l'asse x. Inoltre esso:

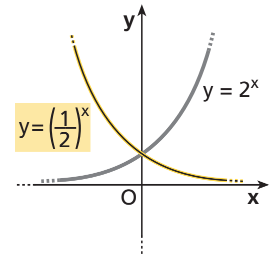
- interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$;
- non interseca mai l'asse x;
- ha andamento decrescente: al crescere dell'esponente decresce il valore della potenza;
- per esponenti positivi crescenti le potenze si avvicinano sempre più a 0 $\left(\text{si scrive anche: } \left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0 \text{ per } x \to +\infty\right)$.



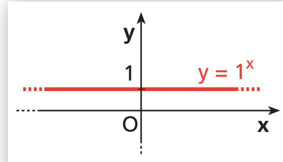
I grafici delle funzioni esponenziali con basi $0 < a < 1$ (figura a lato) hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è il simmetrico rispetto all'asse y del grafico di $y = 2^x$. Infatti, una simmetria rispetto all'asse y trasforma $y = 2^x$ in $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Questa proprietà è vera qualunque siano le basi a e $\frac{1}{a}$ (con $a \neq 1$).



Terzo caso: $a = 1$
La funzione è $y = 1^x$, ossia $y = 1$, per qualunque valore della x. Si tratta della retta parallela all'asse x passante per il punto (0; 1).

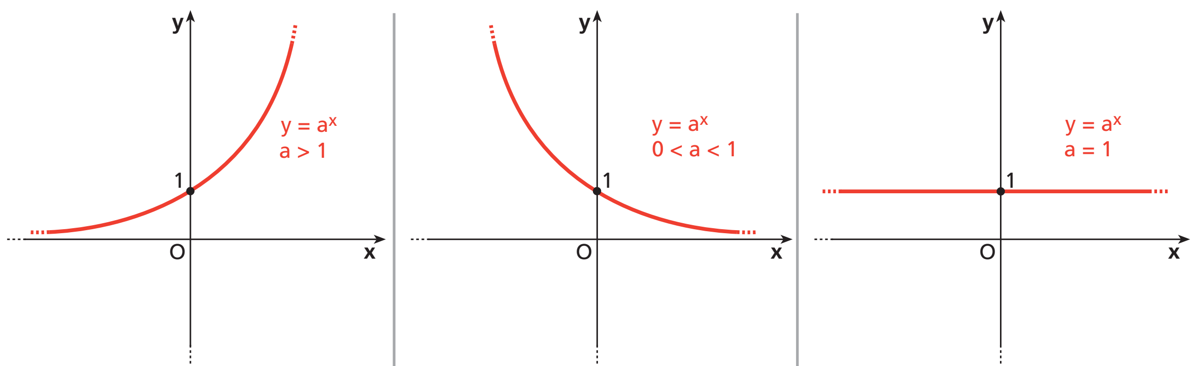


▲ **Figura 4** Il grafico della funzione $y = 1^x$ è la retta parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto di ordinata uguale a 1, ossia la retta di equazione $y = 1$.

In generale, qualunque sia il valore $a > 0$ della base, il grafico della funzione esponenziale:

- sta tutto «sopra» l'asse x (cioè, $a^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$);
- in particolare, non interseca mai l'asse x ($a^x \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$);
- interseca *sempre* l'asse y nel punto (0; 1).

▼ **Figura 5** Riassumiamo le proprietà della funzione esponenziale distinguendo i tre casi $a > 1$, $0 < a < 1$, $a = 1$.



a.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

b.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

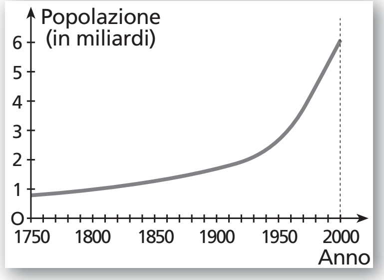
c.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: {1};
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

La crescita esponenziale

Confrontiamo l'andamento delle funzioni $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ con quello di $y = 2^x$ mediante una tabella.
Si può notare che, all'aumentare di x, 2^x supera velocemente i valori delle potenze e si potrebbe dimostrare che ciò è vero qualunque esponente n abbia la potenza x^n.

x	x^2	x^3	x^4	2^x
0	0	0	0	1
1	1	1	1	2
10	100	1000	10^4	1024
20	400	$8 \cdot 10^3$	$1{,}6 \cdot 10^5$	$\simeq 1{,}05 \cdot 10^6$
100	10^4	10^6	10^8	$\simeq 1{,}3 \cdot 10^{30}$
200	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^6$	$1{,}6 \cdot 10^9$	$\simeq 1{,}6 \cdot 10^{60}$

Ci sono fenomeni il cui andamento è descrivibile con una funzione esponenziale e il cui aumento molto rapido viene quindi detto *crescita esponenziale*. Per esempio negli ultimi secoli la popolazione mondiale ha avuto una crescita di questo tipo.



▶ **Figura 6** La popolazione mondiale dal 1750 al 2000 (fonte: United Nations Population Division).

Le funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$

● Studiamo il dominio di potenze in cui la base o l'esponente variano al variare di x.

La definizione di potenza a esponente reale permette di estendere il concetto di funzione a forme del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$. Studiamone il dominio considerando per primi i casi con base o con esponente costante a.

1. $y = a^{f(x)}$ esiste in tutto il dominio di $f(x)$, se e solo se $a > 0$.

ESEMPIO

$y = 3^{\sqrt{x-1}}$ ha per dominio $x \geq 1$.

2. $y = [f(x)]^a$ esiste per $f(x) \geq 0$ se $a \in \mathbb{R}^+$, per $f(x) > 0$ se $a \in \mathbb{R}^-$.

ESEMPIO

$y = (x^2 - 1)^{\sqrt{2}}$ ha per dominio $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Per la funzione $y = (x^2 - 1)^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(x^2-1)^{\sqrt{2}}}$ dobbiamo invece escludere i valori che annullano $x^2 - 1$ (e quindi il denominatore), pertanto il suo dominio è $x < -1 \vee x > 1$.

3. $y = [f(x)]^{g(x)}$ esiste nel dominio di $g(x)$ se e solo se $f(x) > 0$.

ESEMPIO

Consideriamo $y = (4x^2 - 1)^{\sqrt{x}}$:

$\sqrt{x}$ esiste per $x \geq 0$.

Inoltre, perché esista la potenza, deve essere

$$4x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}.$$

Ponendo a sistema le due condizioni, otteniamo il dominio della funzione: $x > \dfrac{1}{2}$.

3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

● L'equazione

$2 \cdot 5^x - 1 = 0$

è esponenziale, mentre

$2x \cdot 5^2 - 1 = 0$

non è un'equazione esponenziale.

DEFINIZIONE

Equazione esponenziale

Un'equazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Abbiamo già detto che considereremo solo potenze a^x con base reale $a > 0$ ed esponente reale x. Trattiamo l'equazione esponenziale più semplice, del tipo:

$$a^x = b, \text{ con } a > 0.$$

Equazione esponenziale impossibile
Abbiamo visto che $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ quando $a > 0$.
In altre parole, a^x non può essere mai negativo o nullo.

Per esempio, l'equazione $2^x = -4$ non è verificata per alcun valore reale di x.
Non hanno soluzioni nemmeno equazioni del tipo $1^x = 4$ perché $1^x = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Pertanto, i casi in cui l'equazione $a^x = b$ $(a > 0)$ risulta *impossibile* sono i seguenti:

1. se $b \leq 0$;
2. se $a = 1$ e $b \neq 1$.

Equazione esponenziale indeterminata
Se $a = 1$ e $b = 1$, l'equazione ha infinite soluzioni, cioè l'equazione

$$1^x = 1$$

è *indeterminata*, perché è verificata per qualunque valore reale di x.

Equazione esponenziale determinata
L'equazione esponenziale $a^x = b$, con a e b reali positivi e $a \neq 1$, ammette sempre **una e una sola soluzione**. Infatti, poiché $y = a^x$ è una funzione monotòna, è anche biunivoca, quindi per ogni x esiste una sola immagine y e viceversa.

È possibile risolvere l'equazione **in modo immediato**, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

ESEMPIO
Risolviamo $25^x = 125$.

Poiché 25 e 125 si possono scrivere come potenze di 5, riscriviamo l'equazione come:

$$5^{2x} = 5^3.$$

Se due potenze sono uguali e sono uguali le basi, devono essere uguali anche gli esponenti, quindi:

$$5^{2x} = 5^3 \quad \rightarrow \quad 2x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

- Non hanno significato scritture del tipo $(-5)^x = -125$, perché la base e il valore della potenza devono essere positivi.
- La funzione $y = a^x$ è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.
- Non esiste un metodo generale per la risoluzione delle equazioni esponenziali. Noi considereremo solo alcuni casi e in particolare le equazioni risolvibili con i logaritmi (paragrafo 8).
- $25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$.

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

DEFINIZIONE
Disequazione esponenziale
Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

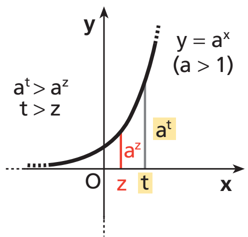
Per le disequazioni esponenziali valgono osservazioni analoghe a quelle relative alle equazioni esponenziali, purché ricordiamo quanto segue:

- se $a > 1$, $\quad t > z \quad \Leftrightarrow \quad a^t > a^z$;
- se $0 < a < 1$, $\quad t > z \quad \Leftrightarrow \quad a^t < a^z$.

Consideriamo alcuni esempi.

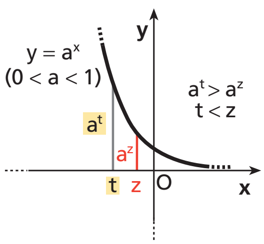
● Se $a > 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t > z.}$$



● Se $0 < a < 1$, allora

$$\boxed{a^t > a^z \quad \Leftrightarrow \quad t < z.}$$



ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione $32^x > 128$.

Osservando che 32 e 128 sono potenze di 2, riscriviamo la disequazione:

$$2^{5x} > 2^7.$$

Poiché le potenze hanno base maggiore di 1, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di ugual verso**:

$$5x > 7 \quad \to \quad x > \frac{7}{5}.$$

2. Risolviamo la disequazione $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$.

Osserviamo che $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{4}$ sono potenze di $\frac{1}{2}$, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Poiché le potenze hanno base minore di 1, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di verso contrario**:

$$3x < 2 \quad \to \quad x < \frac{2}{3}.$$

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Sappiamo che l'equazione esponenziale $a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, ammette una e una sola soluzione. A tale valore si dà il nome di logaritmo in base a di b e si scrive: $x = \log_a b$.

Per esempio, la soluzione dell'equazione $2^x = 7$ è $x = \log_2 7$.

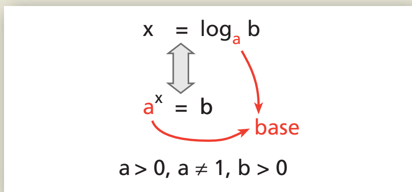
● Non esiste $\log_a 0$ né il logaritmo di un numero negativo: per definizione la base e l'argomento devono essere positivi.

● Deve essere $a \neq 1$ perché, come abbiamo visto, l'equazione $1^x = b$ è impossibile o indeterminata.

DEFINIZIONE

Logaritmo in base *a* di *b*

Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.



Il numero b viene detto **argomento** del logaritmo.

Dalla definizione possiamo osservare che il logaritmo permette di scrivere in modo diverso la relazione che esiste in una potenza fra base, esponente e risultato. Per esempio, le due scritture $5^2 = 25$ e $2 = \log_5 25$ sono equivalenti.

Dalla definizione, supponendo $a, b > 0$ e $a \neq 1$, si ricava:

$\mathbf{\log_a 1 = 0}$, perché $a^0 = 1$;

$\mathbf{\log_a a = 1}$, perché $a^1 = a$;

$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$, siccome da $a^x = b$ si ha $x = \log_a b$, sotituendo x nell'esponente di a otteniamo $a^{\log_a b} = b$.

Osserviamo poi che se due numeri positivi sono uguali, anche i loro logaritmi, rispetto a una stessa base, sono uguali e viceversa:

$$\boldsymbol{x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y}.$$

Vale il seguente teorema.

TEOREMA

All'aumentare dell'argomento b (reale positivo), il logaritmo $\log_a b$:
- aumenta, se $a > 1$;
- diminuisce, se $0 < a < 1$.

ESEMPIO

Fissati i due argomenti 5 e 2, poiché $5 > 2$, risulta:

$\log_{10} 5 > \log_{10} 2$, perché la base 10 è maggiore di 1;

$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 2$, perché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1.

In genere, la base 10 si sottintende. Per esempio, $\log_{10} 5$ si scrive $\log 5$.

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono tre, valide qualunque sia la base, purché positiva e diversa da 1.
Nei loro enunciati sottintendiamo che i logaritmi sono riferiti a una stessa base.

PROPRIETÀ

Logaritmo di un prodotto

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla *somma* dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\boldsymbol{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad (b > 0, c > 0)}.$$

ESEMPIO

$\log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16.$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che il primo membro è

$\log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 128 = 7$, perché $128 = 2^7$, e il secondo membro è:

$$\log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7,$$

perché $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$.

PROPRIETÀ

Logaritmo di un quoziente

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla *differenza* fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \; (b > 0, c > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_3\left(\frac{729}{9}\right) = \log_3 729 - \log_3 9.$$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che il primo membro è

$$\log_3\left(\frac{729}{9}\right) = \log_3 81 = 4, \text{ perché } 81 = 3^4,$$

e il secondo membro è:

$$\log_3 729 - \log_3 9 = 6 - 2 = 4,$$

perché $729 = 3^6$ e $9 = 3^2$.

PROPRIETÀ

Logaritmo di una potenza

Il logaritmo della potenza di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto di tale esponente per il logaritmo di quel numero positivo:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \;\; (b > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_3 9^4 = 4 \cdot \log_3 9.$$

Si verifica l'uguaglianza tenendo conto che:

$$\log_3 9^4 = \log_3 (3^2)^4 = \log_3 3^8 = 8;$$

$$\log_3 9 = 2, \text{ perché } 3^2 = 9, \text{ quindi } 4 \cdot \log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Un caso particolare

Poiché $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, si può applicare la terza proprietà anche nel caso del logaritmo di una radice:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b \; (b > 0).$$

ESEMPIO

$\log_{10} \sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_{10} 6$, perché $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

La dimostrazione delle proprietà dei logaritmi

Per dimostrare le proprietà dei logaritmi, poniamo:

$$x = \log_a b, \quad y = \log_a c.$$

Per definizione di logaritmo, le due uguaglianze scritte equivalgono alle seguenti:

$$a^x = b, \quad a^y = c.$$

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\boldsymbol{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Date le uguaglianze $a^x = b$ e $a^y = c$, si ha:

$a^x \cdot a^y = b \cdot c$	moltiplicazione membro a membro
$a^{x+y} = b \cdot c$	prodotto di due potenze di ugual base
$x + y = \log_a (b \cdot c)$	definizione di logaritmo
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$	sostituzione usando $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$$\boldsymbol{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Date le uguaglianze $a^x = b$ e $a^y = c$, si ha:

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c}$	divisione membro a membro
$a^{x-y} = \frac{b}{c}$	quoziente di due potenze di ugual base
$x - y = \log_a \frac{b}{c}$	definizione di logaritmo
$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$	sostituzione usando $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

Dimostriamo la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$\boldsymbol{\log_a b^n = n \log_a b}$$

Data l'uguaglianza $a^x = b$, si ha:

$(a^x)^n = b^n$	elevamento all'esponente n dei due membri
$a^{nx} = b^n$	potenza di una potenza
$nx = \log_a b^n$	definizione di logaritmo
$n \log_a b = \log_a b^n$	sostituzione usando $x = \log_a b$
$\log_a b^n = n \log_a b$	proprietà simmetrica dell'uguaglianza

La formula del cambiamento di base

Come calcolare i logaritmi usando la calcolatrice

Abbiamo visto che $\log_a b$ è un numero reale per $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.
Abbiamo anche visto che, quando a e b possono essere scritti come potenze con la stessa base, allora $\log_a b$ è un numero intero o razionale.

- $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$.

$\log_9 27 = \frac{3}{2}$ perché $9^{\frac{3}{2}} = 3^{\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} = 3^3 = 27$.

In caso contrario, non sempre $\log_a b$ si riesce a esplicitare. Per esempio, dato $\log_3 14$, non è possibile scrivere 14 come potenza di base 3 ed esponente intero o razionale. In casi come questo usiamo la calcolatrice per calcolare un'approssimazione decimale del logaritmo.
Le calcolatrici sono spesso costruite per calcolare i logaritmi in due sole basi: la base 10 e la base e. Il numero $\boldsymbol{e}$ è detto **numero di Nepero** ed è un numero irrazionale, il cui valore, approssimato a cinque cifre decimali, è 2,71828.

e si può ottenere studiando i numeri del tipo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Attribuendo a n valori crescenti, cioè 1, 2, ..., la successione dei numeri di quel tipo si avvicina a un numero irrazionale che viene chiamato e.

Per distinguere i logaritmi nelle due basi si usano le seguenti notazioni:

log *x* indica il $\log_{10} x$, detto anche **logaritmo decimale**;

ln *x* indica il $\log_e x$, detto anche **logaritmo naturale** o **neperiano**.

Vediamo come utilizzare la calcolatrice.

ESEMPIO

Calcoliamo $\log_3 14$.

Posto $x = \log_3 14$, abbiamo:

$$3^x = 14.$$

Calcoliamo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri:

$$\log 3^x = \log 14.$$

Il procedimento è analogo se usiamo la base e.

Per la proprietà del logaritmo di una potenza,

$$x \cdot \log 3 = \log 14,$$

da cui, essendo $\log 3 \neq 0$, ricaviamo:

$$x = \frac{\log 14}{\log 3}.$$

Quindi:

$$\log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3}.$$

Abbiamo così trasformato il logaritmo in base 3 nel quoziente di due logaritmi in base 10.

Ora possiamo calcolare il valore *approssimato* di x, determinando con la calcolatrice il valore di $\log 14$ e il valore di $\log 3$:

$$x = \frac{\log 14}{\log 3} \simeq \frac{1,146128}{0,477121} \simeq 2,402.$$

La formula del cambiamento di base

In generale, per scrivere il $\log_a b$ mediante logaritmi in base $c > 0$, si utilizza la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1.$$

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è simile, nei passaggi, a quella del precedente esempio. Dalla definizione di logaritmo sappiamo che le due uguaglianze

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad a^x = b$$

sono equivalenti. Calcoliamo allora il logaritmo in base c di entrambi i membri della seconda uguaglianza:

$$\log_c a^x = \log_c b.$$

Per la proprietà del logaritmo di una potenza,

$$x \cdot \log_c a = \log_c b,$$

da cui, essendo $\log_c a \neq 0$ (perché $a \neq 1$):

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Quindi:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Possiamo anche scrivere la formula del cambiamento di base così:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a} \cdot \log_c b.$$

Il numero $\boldsymbol{\frac{1}{\log_c a}}$ è detto **modulo di trasformazione** per il passaggio dalla base c alla base a. Per esempio, per passare dai logaritmi in base 10 a quelli in base 2, il modulo di trasformazione è:

$$\frac{1}{\log 2} \simeq 3,32193.$$

- Per passare dai logaritmi decimali a quelli naturali è:

$$\frac{1}{\log e} \simeq 2,30259.$$

Nepero, Briggs, Eulero

I logaritmi furono introdotti dal matematico scozzese John Napier (1550-1617), che pubblicò nel 1614 la prima tavola di logaritmi. Napier, chiamato in italiano Nepero, scoprì il numero e, ma non utilizzò come base per i logaritmi né e né 10. Fu il matematico inglese Henry Briggs (1561-1631) a introdurre le prime tavole dei logaritmi in base 10, perché si accorse che alcuni calcoli risultavano più semplici utilizzando come base quella usata per la numerazione posizionale, cioè il 10.
Successivamente Leonhard Euler (1707-1783), in italiano Eulero, utilizzò il numero e, in particolare per definire le potenze con esponente immaginario.
Egli lo indicò per la prima volta con la lettera e.

- Il termine «logaritmo» è stato introdotto da Nepero senza fornirne motivazione. Deriva dai termini greci *lógos* e *arithmós*.
Lógos significa «ragione», «pensiero», ma anche «proporzione»; *arithmós* significa «numero».

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

DEFINIZIONE

Funzione logaritmica

Si chiama funzione logaritmica ogni funzione del tipo:

$$y = \log_a x, \quad \text{con} \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+$; si dimostra che la funzione assume tutti i valori reali, quindi il codominio è $\mathbb{R}$.
Fissata la base a, la funzione logaritmica è così definita:

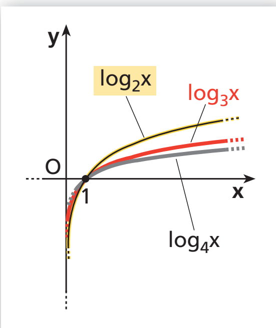
$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f\colon x \mapsto y = \log_a x.$$

Studiamo il grafico della funzione $y = \log_a x$, nei due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

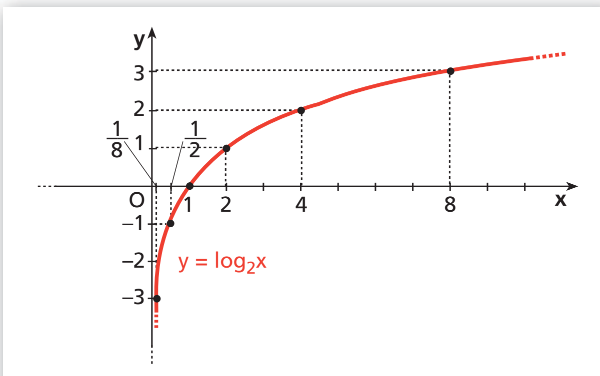
Primo caso: $a > 1$

Scegliamo, per esempio, $a = 2$, e studiamo la funzione $y = \log_2 x$.
Compiliamo una tabella, attribuendo a x valori positivi.
Disegniamo nel piano cartesiano i punti ottenuti e, con l'aggiunta di altri punti, otteniamo il grafico di $y = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



▲ **Figura 7** I grafici delle funzioni logaritmiche con $a > 1$ hanno tutti comportamenti simili a quello di $y = \log_2 x$.

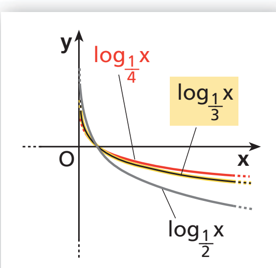


◀ **Figura 8** Poiché l'argomento x deve essere positivo, il grafico si trova nel semipiano a destra dell'asse y e interseca l'asse x nel punto (1; 0). I punti della curva hanno ordinata positiva se $x > 1$, hanno ordinata negativa se $x < 1$. Il grafico ha andamento crescente e si avvicina sempre più all'asse y per $x \to 0$.

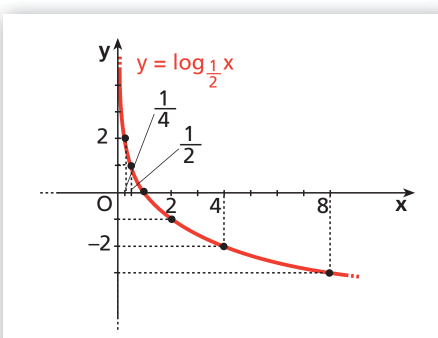
Secondo caso: $0 < a < 1$

Scegliamo $a = \frac{1}{2}$, quindi la funzione è $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
Compiliamo di nuovo una tabella e disegniamo il grafico.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



▲ **Figura 9** I grafici delle funzioni logaritmiche con $0 < a < 1$ hanno tutti lo stesso andamento di quello di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

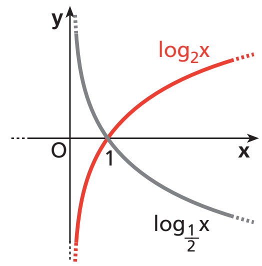


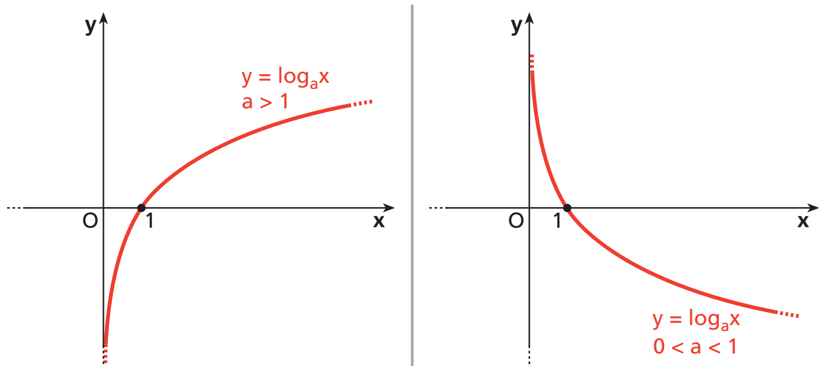
◀ **Figura 10** Anche questa curva si trova nel semipiano a destra dell'asse y e interseca l'asse x nel punto (1; 0). I punti della curva hanno ordinata negativa se $x > 1$, hanno ordinata positiva se $0 < x < 1$. È una funzione decrescente e il suo grafico si avvicina sempre più all'asse y per $x \to 0$.

- I grafici di $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse x. Infatti, per la formula del cambiamento di base, si ha

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x,$$

quindi le ordinate dei punti che hanno la stessa ascissa sono opposte.
Questa proprietà è vera considerando generiche basi a e $\frac{1}{a}$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.





a.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

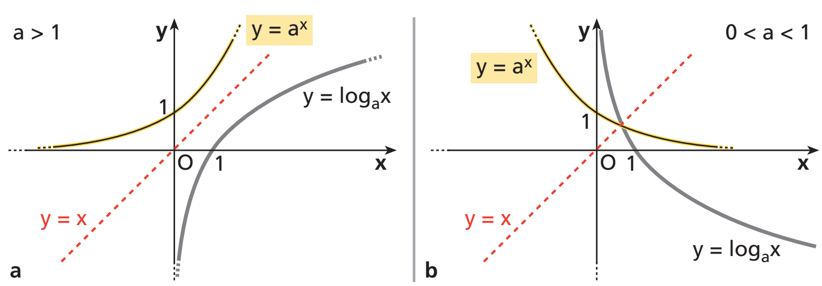
b.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

◀ **Figura 11** Le proprietà della funzione logaritmo.

- La funzione $y = a^x$ è una funzione biiettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, quindi è invertibile. Ricaviamo x in funzione di y. Applicando la definizione di logaritmo, otteniamo:

$$x = \log_a y.$$

Pertanto, la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale.
I grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 12).



◀ **Figura 12** I grafici della funzione esponenziale e della funzione logaritmo sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il grafico di funzioni del tipo $y = e^{f(x)}$

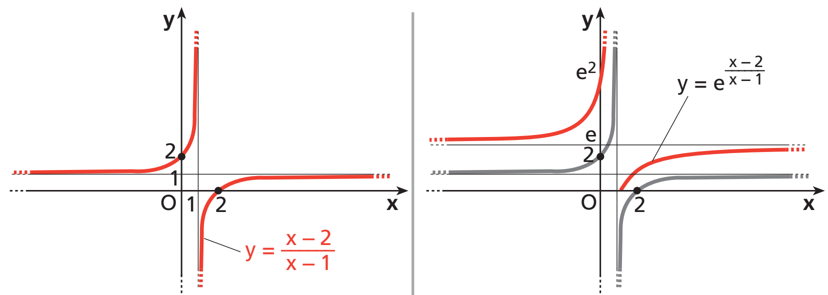
Per disegnare l'andamento del grafico della funzione

$$y = e^{f(x)},$$

noto quello di $y = f(x)$, teniamo conto delle proprietà di $y = e^x$ e in particolare:

$$\begin{aligned} &\text{se } x \to -\infty, && e^x \to 0;\\ &\text{se } x \to +\infty, && e^x \to +\infty;\\ &\text{se } x = 0, && e^x = 1. \end{aligned}$$

Per esempio, disegniamo il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$.



a. Tracciamo il grafico di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

b. Tenendo conto delle proprietà della funzione esponenziale tracciamo il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$.

▶ Figura 13

Nel disegnare il grafico abbiamo tenuto conto che:

$$\text{per } x \to -\infty \text{ o } x \to +\infty, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 1, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to e^1 = e;$$

$$\text{per } x \to 1^+, \quad \frac{x-2}{x-1} \to -\infty, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to 0;$$

$$\text{per } x \to 1^-, \quad \frac{x-2}{x-1} \to +\infty, \quad e^{\frac{x-2}{x-1}} \to +\infty;$$

(con $x \to 1^+$ indichiamo che x tende a 1 assumendo valori maggiori di 1, con $x \to 1^-$ assumendo valori minori di 1).

Notiamo inoltre che, essendo sempre $e^x > x$, si ha anche $e^{\frac{x-2}{x-1}} > \frac{x-2}{x-1}$, ossia il grafico di $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$ «sta sempre sopra» a quello di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

● Per $x \to 1^+$ consideriamo solo la parte di grafico a destra della retta $x = 1$, per $x \to 1^-$ consideriamo solo la parte a sinistra.

Il grafico di funzioni del tipo $y = \ln f(x)$

Per disegnare l'andamento del grafico della funzione

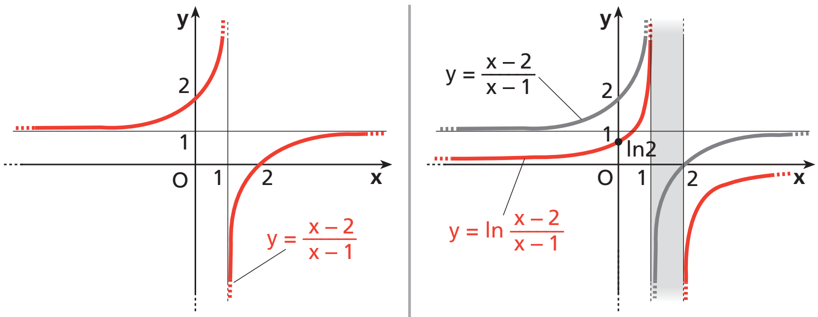
$$y = \ln f(x),$$

noto quello di $y = f(x)$, teniamo conto delle proprietà di $y = \ln x$ e in particolare:

$$\begin{aligned} &\text{se } x \leq 0, && \nexists \ln x;\\ &\text{se } x \to 0^+, && \ln x \to -\infty;\\ &\text{se } x = 1, && \ln x = 0;\\ &\text{se } x \to +\infty, && \ln x \to +\infty. \end{aligned}$$

Per esempio, disegniamo il grafico di $y = \ln \frac{x-2}{x-1}$.

● Poiché il dominio di $y = \ln x$ è $\mathbb{R}^+$, x può avvicinarsi a 0 solo da valori maggiori di 0, quindi $x \to 0^+$.



a. Disegniamo il grafico di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

b. Tenendo conto delle proprietà di $y = \ln x$, disegniamo il grafico di $y = \ln \frac{x-2}{x-1}$.

◀ **Figura 14**

Nel disegnare il grafico abbiamo tenuto conto che:

$$\text{per } 1 < x < 2, \quad \frac{x-2}{x-1} < 0, \qquad \nexists \ln \frac{x-2}{x-1};$$

$$\text{per } x \to 2^+, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 0, \qquad \ln \frac{x-2}{x-1} \to -\infty;$$

$$\text{per } x \to \pm\infty, \quad \frac{x-2}{x-1} \to 1, \qquad \ln \frac{x-2}{x-1} \to 0;$$

$$\text{per } x \to 1^-, \quad \frac{x-2}{x-1} \to +\infty, \qquad \ln \frac{x-2}{x-1} \to +\infty.$$

Notiamo inoltre che, essendo sempre $\ln x < x$, si ha anche $\ln \frac{x-2}{x-1} < \frac{x-2}{x-1}$, quindi il grafico di $y = \ln \frac{x-2}{x-1}$ «sta sempre sotto» a quello di $y = \frac{x-2}{x-1}$.

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

DEFINIZIONE

Equazione logaritmica

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

● $\log(x+3) = 5$ è un'equazione logaritmica; $(x-5)\log 3 = 7$ non è un'equazione logaritmica.

Consideriamo le equazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{\log_a A(x) = \log_a B(x)},$$

dove con $A(x)$ e $B(x)$ indichiamo due funzioni dell'incognita x.

Per le condizioni di esistenza dei logaritmi deve essere: $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$.

● Ricorda che il logaritmo è definito solo in $\mathbb{R}^+$.

Dal momento che:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a A(x) = \log_a B(x),$$

per risolvere l'equazione è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x) = B(x)$ e controllare successivamente se queste soddisfano le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3)$.

Scriviamo le condizioni di esistenza imponendo che ciascun logaritmo presente nell'equazione abbia argomento maggiore di 0. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \quad x > 0, \text{ cioè C.E.: } x > 0.$$

Applichiamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\log x\,(x + 3) = \log 2(2x + 3).$$

Svolgiamo i calcoli e passiamo all'uguaglianza degli argomenti:

$$x^2 + 3x = 4x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Il valore -2 non soddisfa la condizione di esistenza posta ($x > 0$), che è invece soddisfatta da 3. Quindi, l'unica soluzione dell'equazione logaritmica iniziale è $x = 3$.

Usiamo un'incognita ausiliaria

Mostriamo con un esempio il metodo di risoluzione di un secondo tipo di equazione logaritmica.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$.
La condizione di esistenza del logaritmo è $x > 0$.
Posto $\log_3 x = t$, otteniamo:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

da cui:

$$\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3};$$

$$\log_3 x = 3 \rightarrow x_2 = 27.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Consideriamo le disequazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma

$$\boldsymbol{\log_a A(x) < \log_a B(x)},$$

o nelle forme analoghe con gli altri segni di disuguaglianza.

Per passare da una disequazione di questo tipo a una fra i due argomenti dobbiamo ricordare il comportamento della funzione logaritmica:

- per $a > 1$, $\quad \log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b < c$;
- per $0 < a < 1$, $\quad \log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c$;

con $b, c > 0$.

Le soluzioni di una disequazione logaritmica del tipo considerato si ottengono risolvendo il sistema formato da:

- le condizioni di esistenza della disequazione;
- la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione $\log_5 (x - 1) < 2$.
Poiché $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$, riscriviamo la disequazione:

$$\log_5 (x - 1) < \log_5 25.$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 & \text{condizione di esistenza} \\ x - 1 < 25 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, con lo stesso verso di quella fra i logaritmi (base maggiore di 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 26 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione di partenza sono:

$$1 < x < 26.$$

2. Risolviamo la disequazione $\log_{\frac{1}{3}} (x - 4) > \log_{\frac{1}{3}} 5x$.

Dobbiamo risolvere il sistema:

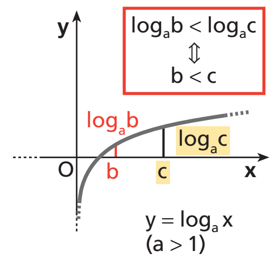
$$\begin{cases} x - 4 > 0 & \text{condizione di esistenza del primo logaritmo} \\ 5x > 0 & \text{condizione di esistenza del secondo logaritmo} \\ x - 4 < 5x & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, di verso contrario a quella fra i logaritmi (base compresa fra 0 e 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x > 0 \\ -4x < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow x > 4$$

Le soluzioni della disequazione di partenza sono:

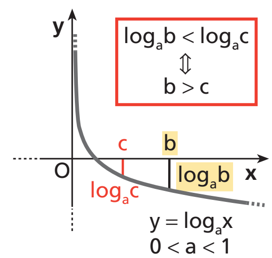
$$x > 4.$$

Se $a > 1$, allora



Per esempio,
$\log_2 8 < \log_2 32 \Leftrightarrow 8 < 32$.

Se $0 < a < 1$, allora



Per esempio,
$\log_{\frac{1}{2}} 16 < \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow 16 > 8$.

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Le equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Alcune equazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione

$$7 \cdot 5^{2x} = 3^{x+1}.$$

Poiché entrambi i membri dell'equazione sono numeri positivi, possiamo applicare il logaritmo in base 10 e trovare un'equazione equivalente:

$$\log (7 \cdot 5^{2x}) = \log 3^{x+1} \quad \to \quad \log 7 + 2x \log 5 = (x + 1) \log 3 \quad \to$$

$$\to \quad 2x \log 5 - x \log 3 = \log 3 - \log 7 \quad \to$$

$$\to \quad x(2 \log 5 - \log 3) = \log 3 - \log 7 \quad \to \quad x = \frac{\log 3 - \log 7}{2 \log 5 - \log 3}.$$

● Possiamo usare logaritmi in una base qualsiasi, purché sia la stessa per entrambi i membri. Per semplicità useremo i logaritmi in base 10.

● Con questo metodo non possiamo risolvere equazioni come $1 + 5^{2x} = 3^{x+1}$. Infatti essa è equivalente a $\log (1 + 5^{2x}) = \log 3^{x+1}$, ma non riusciamo a semplificare $\log (1 + 5^{2x})$ usando le proprietà dei logaritmi, perché nell'argomento compare una somma e non un prodotto!

● L'equazione

$$1 + 5^{2x} = 3^{x+1}$$

si può risolvere con il metodo grafico, che esamineremo negli esercizi.

Le disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

I logaritmi sono utili anche per risolvere disequazioni esponenziali come quella del seguente esempio.

ESEMPIO

Per risolvere la disequazione

$$\frac{6^{x-3}}{4} < 2 \cdot 5^{3x},$$

applichiamo il logaritmo in base 10 a entrambi i membri. Poiché la base è 10 (maggiore di 1), se $a < b$, allora $\log a < \log b$:

$$\log \frac{6^{x-3}}{4} < \log (2 \cdot 5^{3x}) \quad \to \quad (x - 3) \log 6 - \log 4 < \log 2 + 3x \log 5 \quad \to$$

$$\to \quad x \log 6 - 3x \log 5 < 3 \log 6 + \log 4 + \log 2 \quad \to$$

$$\to \quad x(\log 6 - 3 \log 5) < 3 \log 6 + \log 4 + \log 2.$$

Osserviamo che $\log 6 - 3 \log 5 < 0$ e quindi cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$x > \frac{3 \log 6 + \log 4 + \log 2}{\log 6 - 3 \log 5}.$$

● $\log 6 - 3 \log 5 < 0$ perché è equivalente a

$$\log 6 < 3 \log 5$$
$$\log 6 < \log 5^3$$
$$6 < 5^3.$$

● **La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni**

Negli esercizi vedremo come è possibile utilizzare il metodo grafico per ottenere le soluzioni (almeno in modo approssimato) di equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

ESPLORAZIONE

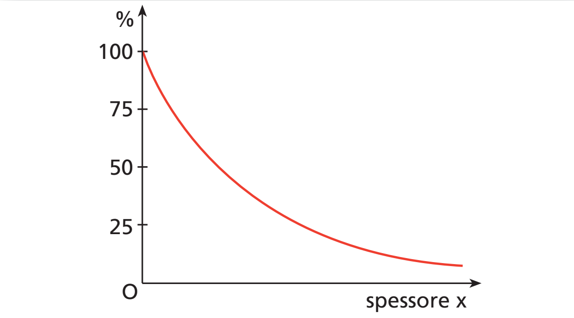
Esponenziale e medicina

La materia assorbe le radiazioni

I raggi X sono radiazioni elettromagnetiche invisibili all'occhio umano: sono fortemente energetiche, a frequenza molto alta. Tutte le onde elettromagnetiche, nell'attraversare uno strato di materia, vengono in parte assorbite, in parte trasmesse. Pertanto, l'intensità I trasmessa al di là dello strato risulta inferiore all'intensità I_0 del raggio incidente.
L'intensità trasmessa dipende dallo spessore x di materia attraversata, secondo una legge esponenziale (**legge dell'assorbimento della radiazione**):

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

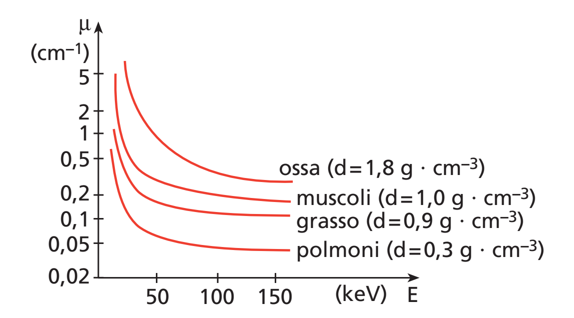
μ è un parametro, detto **coefficiente di attenuazione** o **di assorbimento**.



▲ Percentuale dell'intensità della radiazione trasmessa da uno spessore x di materia, rispetto a quella incidente. L'andamento è esponenziale.

Assorbimento differenziato e lastre

Il coefficiente di assorbimento dipende dall'energia del raggio incidente e dalla densità della sostanza attraversata. Le tecniche di diagnosi medica, basate sull'uso dei raggi X, sfruttano proprio il fatto che, a parità di energia del raggio incidente, l'assorbimento della radiazione è diverso a seconda della densità dei tessuti biologici attraversati. L'aria non attenua i raggi X, il grasso li assorbe pochissimo, il fegato, i muscoli e i reni un po' di più. Le ossa, con il loro alto contenuto di sali di calcio, li trattengono quasi del tutto. Quando si fanno delle radiografie, si espone una parte del corpo a raggi X: quelli che riescono ad attraversare i tessuti, emergono dall'altra parte e impressionano una pellicola trasparente, la **lastra**. La lastra è una specie di pellicola fotografica su cui è applicata una sostanza gelatinosa (*emulsione sensibile*) che contiene un composto (un sale) di argento. Questo, dopo essere stato colpito da un raggio X e trattato con alcune sostanze chimiche (il *bagno di sviluppo*, proprio come per le fotografie), si deposita sulla pellicola sotto forma di granuli neri. Quindi la lastra rimane bianca nei punti dove le strutture più ricche di calcio (le ossa e gli organi più densi) hanno bloccato i raggi X, mentre diventa nera, o quasi, dove arrivano i raggi X che non sono stati fermati.



▲ Diverso coefficiente di assorbimento delle strutture biologiche al variare della loro densità d. L'assorbimento è minore man mano che l'energia E della radiazione aumenta.

Attività

A caccia di esponenziali

La funzione esponenziale viene usata per descrivere diversi fenomeni in fisica.

- Fai una ricerca sulle applicazioni degli esponenziali alla fisica e alle altre scienze naturali.

Cerca nel Web:

esponenziali, applicazioni, fisica, spettroscopia d'assorbimento, Lambert Beer, legge

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

LA RETE DI SANT'ANTONIO

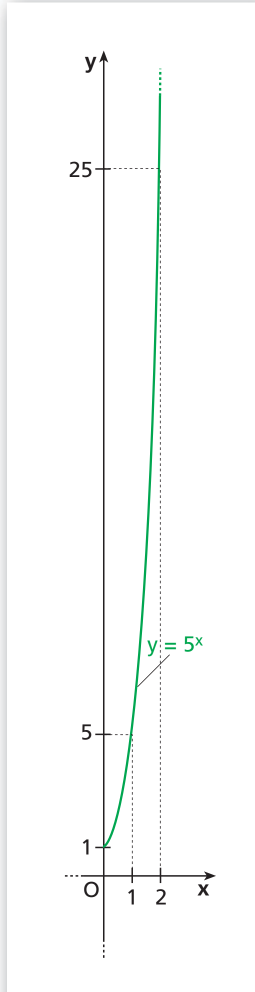
Perché le catene di Sant'Antonio non funzionano?

▶ Il quesito completo a pag. 553

Un meccanismo quasi perfetto…
Come prima cosa spedisci cinque lettere (a Giorgio, Grazia, Giovanni, Gianna e Gino) e mandi 10 euro ciascuno ad Ada, Bruno, Carla, Davide ed Elio.
Poi non devi far altro che aspettare. I tuoi cinque amici (Giorgio e gli altri) dopo un po' ti manderanno 50 euro e spediranno 5 lettere ciascuno ad altri loro amici. In tutto saranno 25 ($= 5^2$) nuove lettere.
A loro volta questi 25 amici-degli-amici ti manderanno 250 euro e spediranno… Poi ci saranno gli amici-degli-amici-degli-amici e così via… fino agli amici-degli-amici-degli-amici-degli-amici-degli-amici.
Quanti soldi riceverai in tutto? 5 volte 10 euro dagli amici, 5^2 volte dagli amici-degli-amici, poi 5^3, 5^4 e infine 5^5. In tutto $(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) \times 10$, cioè 39 050 euro, grazie alla piccola generosità dei 3905 «amici-di-qualcuno».
Anche loro non devono far altro che aspettare il loro turno per ricevere altrettanti soldi!

Perché allora la catena non funziona?
Supponiamo che Ada sia la persona che comincia la catena. Al primo passo coinvolge 5 persone. Al secondo, 5^2. Al terzo, 5^3 e così via: dopo n passi, sono coinvolte 5^n persone. Il numero di persone coinvolte è una funzione dei passi fatti ed è esattamente l'esponenziale in base 5 di n.
Ada riceve 39 050 euro quando al quinto passo ci sono 5^5 persone che spediscono lettere. A loro volta questi 5^5 riceveranno i loro soldi al decimo passo, quello che coinvolge 5^{10} persone.
E questi 5^{10} naturalmente avranno i loro euro al passo che ne coinvolgerà 5^{15}.
Basta una calcolatrice per scoprire che 5^{15} vale 30 517 578 125, cioè circa 5 volte l'attuale numero di abitanti della Terra!
Quindi, in soli nove passi si esaurisce la possibilità concreta di ricevere soldi. Già per quelli al decimo non è possibile averne, mai.
L'esponenziale è una funzione che cresce molto velocemente e, così facendo, molto presto (dopo nove passi) il numero di persone potenzialmente coinvolte supera il numero degli abitanti della Terra.

Girano sempre gli stessi soldi
Un'alternativa è che le persone che sono già state coinvolte lo siano una seconda volta. Chi viene coinvolto di nuovo nella catena deve cominciare a restituire i soldi che ha ricevuto, ovvero la catena di Sant'Antonio fa girare sempre gli stessi soldi.
È proprio la velocità del meccanismo a far sì che dopo pochi passi servano troppe persone perché questo sia ancora conveniente per qualcuno. Infatti, il numero di persone coinvolte al passo n è 5^n e, come si vede nella figura, l'esponenziale di n con base 5 cresce molto velocemente. Lo stesso vale per ogni altra base più grande di 1.



Una catena di bontà

Perché le catene di Sant'Antonio si chiamano così? Negli anni Cinquanta del secolo scorso circolavano lettere nelle quali si chiedeva di recitare preghiere al Santo e si promettevano eventi fortunati se si fosse continuata la catena, disgrazie se la si fosse interrotta. Sant'Antonio (raffigurato al centro del dipinto mentre fa parlare un neonato) è noto per le energie dedicate alla diffusione di atti d'amore e carità. Pensiamo per un attimo di far partire una catena ispirata ai princìpi del Santo e di chiedere che ognuno che riceva un gesto generoso lo restituisca a cinque nuove persone. Una catena così potrebbe funzionare, perché i gesti generosi non rispondono alle regole dell'economia e ciascuno di noi può farne di più di quanti ne riceve.

LABORATORIO DI MATEMATICA
I LOGARITMI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris tracciamo i grafici di $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{4}$ e di $g(x) = \log_2 f(x)$, per mostrare come l'andamento del logaritmo di una funzione possa essere ricavato da quello della funzione stessa .

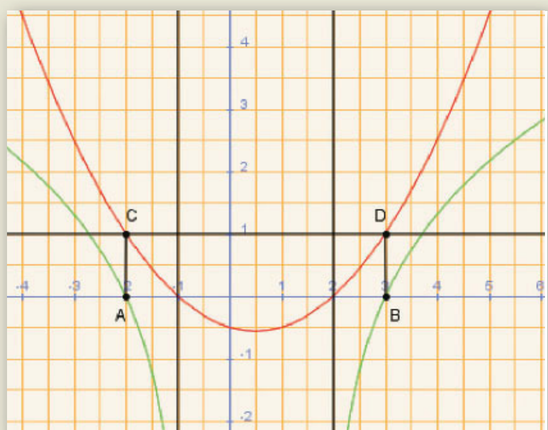
- Attiviamo Wiris e inseriamo in un nuovo blocco le espressioni delle due funzioni (figura 1).
- Scriviamo (figura 1) ed eseguiamo le istruzioni per tracciare il loro grafico, uno in rosso, l'altro in verde (figura 2).
- Prepariamo, quindi, le istruzioni per tracciare i punti A, B, C, D e i segmenti AC e BD (figura 1) e le eseguiamo, per ottenere il disegno di figura 2.
- Osservando il grafico e tenendo conto delle caratteristiche dei logaritmi, costruiamo la tabella sotto, che esprime i legami fra gli andamenti della $f(x)$ e della $g(x)$.

```
f(x) = (x^2-x-2)/4 ;
g(x) = log_2(f(x)) ;
tracciante( punto(0.50,2), 12, 12);
tracciare(f(x),{colore = rosso});
tracciare(g(x),{colore = verde});
[A :=punto(-2,0),B :=punto(3,0)];
[C :=punto(-2,1),D :=punto(3,1)];
[s1 :=segmento(A,C),s2 :=segmento(B,D)];
tracciare({y = 1, A, B, C, D, s1, s2, x=-1, x = 2 });
scrivere("A", punto(-2.20, -0.40));
scrivere("B", punto(3.10, -0.40));
scrivere("C", punto(-2.00, 1.20));
scrivere("D", punto(2.80, 1.20));
```

▶ Figura 1

x	$f(x)$	$\log_2 f(x)$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$]-\infty; -2[$	decresce	decresce
-2	1	0
$]-2; 1[$	decresce	decresce
-1	0	$-\infty$
$]-1; 2[$	negativa	non esiste
2	0	$-\infty$
$]2; 3[$	cresce	cresce
3	1	0
$]3; +\infty[$	cresce	cresce
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

▼ Figura 2



Nel sito: ▶ 2 esercitazioni guidate ▶ 36 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con il computer traccia il grafico delle seguenti coppie di funzioni. Metti poi in evidenza, nel modo che ti permette lo strumento informatico che stai usando, i legami fra il grafico della $g(x)$ e quello della $f(x)$.

1 $f(x) = x + 10$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

2 $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = \ln f(x)$

3 $f(x) = \dfrac{10x}{x-1}$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{5}$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$

5 $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = \log_{10} f(x)$

6 $f(x) = |4x - 4|$ e $g(x) = \log_2 f(x)$

7 $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = \log_2 f(x)$

8 $f(x) = e^{-x^2+4}$ e $g(x) = \ln f(x)$

LA TEORIA IN SINTESI
ESPONENZIALI E LOGARITMI

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

- Una potenza con esponente reale è:

  a^x, con $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

  ESEMPIO: $(\sqrt{2})^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}}$ sono potenze con esponente reale.

  La base di a^x è dunque sempre positiva, mentre l'esponente può essere anche negativo o nullo; il risultato è sempre un numero positivo.
  Casi particolari:
  - $1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
  - $0^x = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$;
  - $a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$.

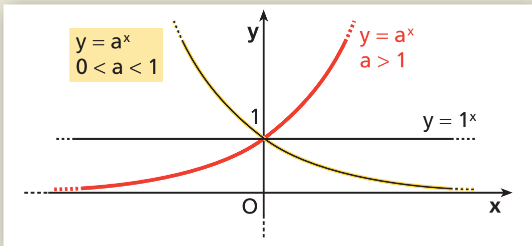
  Valgono le cinque proprietà delle potenze e il seguente teorema:
  - $a > 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
  - $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

- **Funzione esponenziale**: ogni funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ del tipo

  $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

- Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale è o **sempre crescente** o **sempre decrescente**.



3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

- **Equazione esponenziale**: contiene almeno una potenza in cui compare l'incognita nell'esponente.
  L'equazione esponenziale più semplice è del tipo:

  $a^x = b$, con $a > 0$.

  Quando l'equazione è determinata ($a \neq 1, b > 0$), può essere **risolta in modo immediato** se si riescono a scrivere a e b come potenze con la stessa base.

  ESEMPIO: $27^x = 81 \rightarrow 3^{3x} = 3^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$.

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

- **Disequazione esponenziale**: contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.
  Per risolvere le disequazioni esponenziali si tiene conto che:
  - se $a > 1$ e $a^x > a^y$, allora $x > y$;
  - se $0 < a < 1$ e $a^x > a^y$, allora $x < y$.

  ESEMPIO: **1.** $2^{2x} > 2^3 \rightarrow 2x > 3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$.

  2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^5 \rightarrow x < 5$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

- **Logaritmo in base *a* di *b***: dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, è l'esponente da assegnare ad a per ottenere b.

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

base

con $a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0$

Casi particolari:

- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$;
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$.

- **Proprietà**
  - $a^{\log_a b} = b$.
  - $x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$.

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Se $a > 0 \wedge a \neq 1$, valgono le seguenti proprietà:

- **1. Logaritmo di un prodotto**:
  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \; (b > 0, c > 0)$.

  2. Logaritmo di un quoziente:
  $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \; (b > 0, c > 0)$.

  3. Logaritmo di una potenza:
  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b \; (b > 0, n \in \mathbb{R})$.

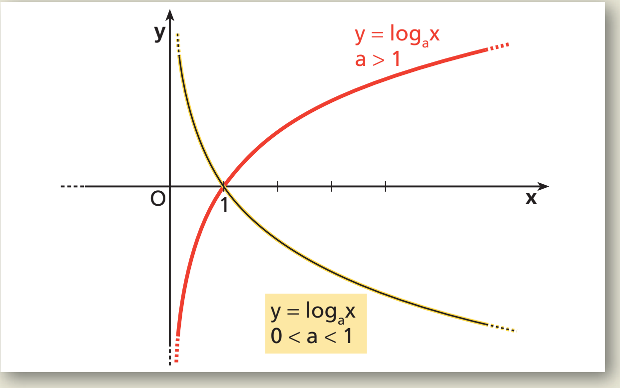
- I logaritmi **in base 10** si indicano con il simbolo **log**, quelli **in base *e*** con **ln**.

- Logaritmi di **diversa base**:
  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a \neq 1, c \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0.$$

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

- **Funzione logaritmica**: è una funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ del tipo

  $y = \log_a x, \quad$ con $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$.



8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

- **Equazione logaritmica**: l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

ESEMPIO: $\log(x - 7) = 1$.

Risoluzione

C.E.: $x - 7 > 0 \;\rightarrow\; x > 7$;
$\log(x - 7) = \log 10$;
$x - 7 = 10 \;\rightarrow\; x = 17$;
$17 > 7 \;\Rightarrow\;$ 17 è soluzione accettabile.

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

- Fra le **disequazioni logaritmiche** consideriamo quelle del tipo:

$$\log_a A(x) < \log_a B(x).$$

- **Risoluzione.**
  Teniamo conto che:
  - per $a > 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b < c$;
  - per $0 < a < 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b > c$;

  e risolviamo il sistema formato da:
  - le condizioni di esistenza della disequazione;
  - la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO: $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) < \log_{\frac{1}{3}} 3$.

$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 2 > 3 \end{cases}$ C.E.; disuguaglianza fra gli argomenti, con verso opposto rispetto a quella fra i logaritmi $\left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 5 \end{cases} \rightarrow \quad x > 5.$$

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

- Alcune equazioni e disequazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

ESEMPIO: $2 \cdot 6^x = 5$

$\log 2 + x \log 6 = \log 5$

$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 6}.$$

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

▶ Teoria a pag. 554

Le potenze con esponente intero o razionale

1 Fra le seguenti potenze con esponente razionale elimina quelle prive di significato e spiega il motivo della tua scelta.

$(2\pi)^{-44}$; $(-2)^{\frac{1}{8}}$; $(-3)^{-2}$; $(9-3^2)^0$; $(\sqrt[4]{5})^{-\frac{2}{7}}$; 0^{-2}.

2 Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze con esponente razionale sotto forma di radice.

a) $3^{\frac{5}{8}}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

$\left[\text{a) } \sqrt[8]{3^5};\ 2\cdot\sqrt[3]{2};\ \frac{\sqrt{3}}{9};\ \text{b) } \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}};\ 4\cdot\sqrt[3]{4};\ \sqrt[5]{\frac{9}{121}}\right]$

3 Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale.

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[4]{0,25}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

$\left[\text{a) } 2^{\frac{5}{6}};\ 3^{\frac{5}{4}};\ 2^{-\frac{1}{2}};\ \text{b) } 2^{-\frac{1}{2}};\ 2^{-\frac{8}{19}};\ 5^{-\frac{3}{7}}\right]$

Calcola il valore delle seguenti potenze con esponente razionale.

4 $4^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}$. $\left[\frac{1}{2};\ \frac{2}{9}\sqrt{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right]$

5 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $27^{-\frac{1}{3}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $125^{-\frac{1}{3}}$. $\left[4;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5}\right]$

6 $\left(\sqrt[3]{\frac{25}{4}}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,25}$; $(\sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$. $\left[\frac{2}{5};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3};\ \frac{\sqrt[4]{125}}{5}\right]$

Le potenze con esponente reale

7 Per ognuna delle seguenti potenze con esponente irrazionale, scrivi i primi cinque termini delle successioni che la approssimano per difetto e per eccesso.

$10^{\sqrt{3}}$; 5^{π}; $3^{\sqrt{5}}$; $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$; $3^{\pi-1}$.

8 Indica quali fra le seguenti scritture hanno significato, ossia rappresentano potenze con esponente reale.

a) $-5^{\sqrt{3}}$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+\sqrt{2}}$; c) $(\sqrt{5}+1)^{\pi}$; d) $(1-\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$; e) $1^{\sqrt{3}}$. [a; c; e]

9 Determina per quali valori di a le seguenti scritture hanno significato.

a) $a^{\sqrt{2}+1}$; b) $(a^2+1)^{\pi}$; c) $\left(\frac{2a}{a-3}\right)^{\sqrt{3}}$; d) $a^{\sqrt{a-1}}$; e) $(-a)^a$.

[a) $a \geq 0$; b) $\forall a \in \mathbb{R}$; c) $a \leq 0 \vee a > 3$; d) $a \geq 1$; e) $a < 0$]

10 Metti in ordine crescente i seguenti numeri.

$3^{-\frac{1}{2}}$, $-3^{\sqrt{2}}$, $-3^{\frac{1}{2}}$, -3^{π}, 3^{-1}, $3^{-\sqrt{3}}$.

Indica quali valori possono assumere le variabili affinché le seguenti espressioni rappresentino potenze reali con esponenti reali.

11 $(x+4)^{\pi}$; $(4-|x|)^{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}}$. $[x \geq -4; -4 < x \leq 4; x > 0]$

12 $(\sqrt{x+2})^{\frac{1}{x}}$; x^x; $(x+3)^{\frac{1}{x}}$. $[x > -2 \wedge x \neq 0; x > 0; x > -3 \wedge x \neq 0]$

13 $(\sqrt{a^2+2}-3a)^{x}$; $\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\sqrt{2}}$. $\left[a < \frac{1}{2}; 0 < x \leq 2\right]$

14 $\left(\frac{\sqrt{a^2+3}-2a}{a+1}\right)^{x}$; $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a^2-1}}{1-a}\right)^{2-x}$. $[-1 < a < 1; \text{imp.}]$

Le proprietà delle potenze con esponente reale

VERO O FALSO?

15
a) $4^{\frac{1}{x}} = 4^{-x}$ V F
b) $-8^x = (-8)^x$ V F
c) $6^{x^2} = (6^x)^2$ V F
d) $|-2|^x = |2^x|$ V F
e) $5^x + 5^y = 5^{x+y}$ V F

16
a) $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ V F
b) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}, \forall a \in \mathbb{R}^+$ V F
c) $0^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ V F
d) $a^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \forall a \in \mathbb{R}^+$ V F
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$ V F

17
a) $7^{x-1} = 7^x - 1$ V F
b) $(3^x)^2 = 3^{x^2}$ V F
c) $5^{x-2} \cdot \frac{1}{25} = 5^{x-4}$ V F
d) $8^{1+3x} = 2^{3+3x}$ V F
e) $(a^3)^x \cdot \frac{1}{(a^2)^x} = a$ V F

18
a) $5^{2x-1} = \frac{25^x}{5}$ V F
b) $\sqrt[5]{64^x} = 2^{\frac{6}{5}x}$ V F
c) $\sqrt{2\sqrt{4^x}} = 8^{\frac{x}{2}}$ V F
d) $9 \cdot 3^{2x+1} = 27 \cdot 9^x$ V F
e) $\sqrt{64^{2x}} = 8^x$ V F

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

19 $2^3 \cdot 2^{\sqrt{5}}$; $3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{20}}$; $2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$; $(5^{4\pi} : 5^4) \cdot 5^{\pi}$; $(((6^{\sqrt{2}})^2)^{\sqrt{2}})^{-1}$; $((5)^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$.
$\left[2^{3+\sqrt{5}}; 3^{3\cdot\sqrt{5}}; 6^{\sqrt{3}}; 5^{5\pi-4}; \left(\frac{1}{6}\right)^4; 25\right]$

20 $(2^x \cdot 2^3)^x$; $\sqrt{a} \cdot a^{3x}$; $a \cdot \frac{\sqrt[5]{a^x}}{\sqrt[15]{a^x}}$; $\left(\frac{a^{4x}}{\sqrt{a}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{a^x}$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)^{3x} : \left(\frac{\sqrt[5]{a}}{a^3}\right)^{2x}$.
$\left[2^{x^2+3x}; a^{3x+\frac{1}{2}}; a^{\frac{15+2x}{15}}; a^{\frac{49x-6}{4}}; a^{\frac{41}{10}x}\right]$

21 $(3^{-2x} \cdot 3^3) : 3^x$; $\left(\frac{2^x}{4^{2x}}\right)^3$; $\sqrt{\frac{9^{x+1}}{3^{4x}}}$; $2^x \cdot 4^{x+1} \cdot 16^{x+2}$; $3^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}x}$; $(3^{-2x+1} \cdot \sqrt[7]{9^x})^3$.
$\left[3^{-3x+3}; 2^{-9x}; 3^{1-x}; 2^{7x+10}; 3^{-2x}; 3^{\frac{-36x+21}{7}}\right]$

22 **COMPLETA** inserendo il simbolo $>$ oppure $<$ fra le seguenti coppie di numeri.

a) $3^{2\pi} \ldots 3^6$; $2^{\sqrt{5}} \ldots 2^{\frac{5}{2}}$; $\left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{7}} \ldots \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{5}+1}$; $1{,}12^3 \ldots 3^{1{,}12}$.

b) $4^{0{,}15} \ldots 4^{0{,}25}$; $0{,}12^6 \ldots 0{,}12^5$; $0{,}6^{\sqrt{5}} \ldots 0{,}6^3$; $0{,}31^{\sqrt{3}} \ldots 0{,}31^{\sqrt{7}}$.

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Teoria a pag. 557

23 Costruisci per punti il grafico delle seguenti funzioni.

a) $y = 3^x$; b) $y = 5^x$; c) $y = 2{,}5^x$; d) $y = 0{,}4^x$; e) $y = 1^x$.

Su uno stesso piano cartesiano disegna ciascuna coppia di funzioni esponenziali assegnando alla *x* alcuni valori scelti a piacere.

24 $y = 3^x$ e $y = 3^{2x}$.

25 $y = 2^x$ e $y = 2^{x-1}$.

26 $y = 3^x$ e $y = 3^x - 1$.

27 Disegna il grafico delle funzioni $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$ in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi dedurre dal confronto dei tre grafici?

28 Come nell'esercizio precedente, ma con le funzioni $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

29 Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente? Motiva la risposta.

a) $y = 4^x$; b) $y = (\sqrt{3})^x$.

30 Indica quali delle seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale, motivando la risposta.

$y = 4^{-x}$, $y = (-4)^x$, $y = -4^x$, $y = 1^x$, $y = (-1)^x$.

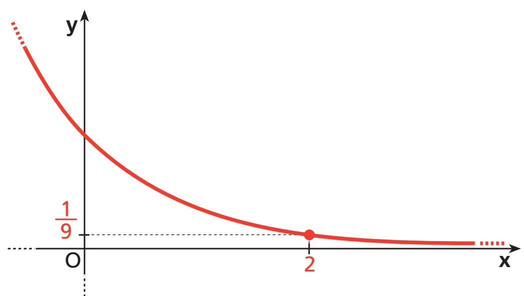
31 Disegna i grafici delle funzioni $y = 2^{-x}$ e $y = -2^x$.

32 Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi notare?

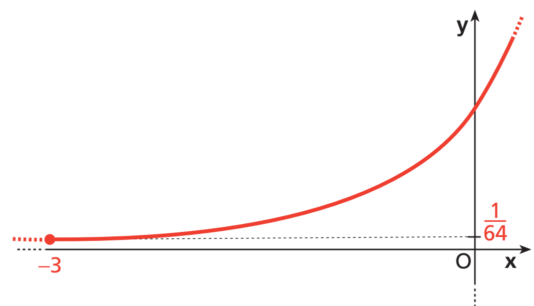
$y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$, $y = 2^x + 1$.

Nelle figure sono disegnati i grafici di funzioni esponenziali. Scrivi le equazioni corrispondenti.

33



34



35 **VERO O FALSO?**

a) $y = (2 - \sqrt{3})^x$ è una funzione decrescente in $\mathbb{R}$. V F

b) Il grafico di $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ interseca l'asse y nel punto di ordinata 1. V F

c) La funzione $y = 4^{-x-3}$ è sempre positiva in $\mathbb{R}$. V F

d) La funzione $y = a^{x-2}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, ha come dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}^+$. V F

e) La funzione $y = \left(\frac{a-1}{a}\right)^x$ esiste per $a < 0 \vee a > 1$ ed è crescente per $a < 0$. V F

Le trasformazioni geometriche e le funzioni esponenziali

Assegnate le seguenti funzioni, scrivi le equazioni delle funzioni ottenute da quelle date mediante una traslazione secondo il vettore indicato e traccia i loro grafici.

36 $y = 2^x$; $\vec{v}(0; -1)$. $[y = 2^x - 1]$

37 $y = 10^x$; $\vec{v}(2; -1)$. $[y = 10^{x-2} - 1]$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

38 $y = 2^{x+2}$; $y = 2^x + 2$.

39 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$; $y = 2^{-x}$.

40 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = -2^x$.

41 $y = 3^{|x|}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

42 $y = 3^{\frac{x}{2}}$; $y = 5 \cdot 3^x$.

43 $y = \frac{2^x}{3}$; $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$.

44 $y = 2^{3x}$; $y = 3 \cdot 2^x$.

45 $y = 4^{-x} + 1$; $y = -3^x - 3$.

46 $y = 2^{x+1} - 3$; $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$.

47 $y = -3^{-x}$; $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

48 $y = |-2^{-x}|$; $y = |2^{x+1} - 1|$.

49 $y = 2 \cdot 3^{-x}$; $y = 4 \cdot 2^x - 1$.

50 $y = -2^{|x|}$; $y = |2^{x+2}|$.

51 $y = -3^{|x|}$; $y = -\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right|$.

52 $y = |1 - 4^x| - 1$; $y = \frac{6^{x+1}}{3^x} + 1$.

53 $y = 2^{-x} + \frac{x}{|x|}$; $y = 3^{|x|-2} + 1$.

54 $y = 2 - 4^{|x|}$; $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|}$.

55 $y = \sqrt{2^x - 1}$; $y = \frac{1}{2^x - 1}$.

56 $y = \sqrt{-2^{-x} + 1}$; $y = \frac{1}{3^{-x} - 1}$.

57 $y = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

58 $y = |2 - 2^{|x|}| + 1$; $y = 2^{-|x|} - 3$.

59 $y = 2^{|x-2|}$; $y = 2^{|x|-2}$.

60 $y = 3^{\frac{|x|}{x}} - 3^x$; $y = \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$.

61 Data la funzione f di equazione $y = 2^{x-1}$, determina l'equazione della sua trasformata f' che si ottiene mediante la dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}$. Disegna il grafico di f'. $\left[y = 4\left(2^{\frac{x}{3}-1}\right)\right]$

62 Determina l'equazione della funzione il cui grafico è simmetrico di quello della funzione $y = 2^{x-1}$ rispetto alla retta $y = -4$. Trasla poi il grafico ottenuto secondo il vettore $\vec{v}(-3; -4)$ e scrivi l'equazione della sua funzione. $[y = -(2^{x-1} + 8); y = -(2^{x+2} + 12)]$

63 Determina l'espressione analitica e traccia il grafico della funzione che si ottiene dalla funzione $y = 2^x$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(2; -1)$ e, al risultato, la simmetria rispetto al punto $(1; -4)$. $[y = -2^{-x} - 7]$

64 Alla funzione $y = 3^x$ applica la simmetria rispetto all'asse y e poi rispetto alla retta di equazione $y = -1$ e infine la traslazione di vettore $\vec{v}(2; 4)$. Scrivi l'equazione della funzione ottenuta e disegna il suo grafico. $[y = -3^{2-x} + 2]$

Il dominio di funzioni contenenti funzioni esponenziali

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

65 $y = 2^{\sqrt{x-1}}$ $[x \geq 1]$

66 $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 4^{\frac{1}{x}}$ $[x \neq 0]$

67 $y = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$ $[x \neq \pm 1]$

68 $y = \sqrt{4^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

69 $y = \frac{4}{3^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

70 $y = 3^{\frac{x-1}{x^3-4x}}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq 0]$

71 $y = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2-4}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2]$

72 $y = \sqrt{2^x} - \sqrt{x+2}$ $[x \geq -2]$

73 $y = \sqrt{-3^{-x}}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

74 $y = 4^{\sqrt{3-|x|}}$ $[-3 \leq x \leq 3]$

75 $y = x^{2x}$ $[x > 0]$

76 $y = (2x-1)^{\pi}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

77 $y = (\sqrt{x+4})^{\sqrt{2}+1}$ $[x \geq -4]$

78 $y = \frac{1}{(x-3)^{\sqrt{3}}}$ $[x > 3]$

79 $y = (2-4x)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\left[x \leq \frac{1}{2}\right]$

80 $y = (x-2)^{\sqrt{4-x}}$ $[2 < x \leq 4]$

81 $y = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[x < -1 \vee x > 1]$

82 $y = (\sqrt{2}+x)^{\frac{1}{|x|-1}}$ $[x > -2 \wedge x \neq \pm 1]$

83 $y = (\sqrt{4-x^2})^{\sqrt{x}}$ $[0 \leq x < 2]$

84 $y = (x - \sqrt{x^2-2x})^x$ $[x \geq 2]$

85 $y = (\sqrt{2x} - x)^{-\sqrt{2}}$ $[0 < x < 2]$

86 $y = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{\sqrt{x+3}}$ $[-3 \leq x < -1 \vee 0 < x < 1]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, indicando per ciascuna il dominio e il codominio.

87 $y = \frac{1}{3^x - 1}$ $[x \neq 0;\ y < -1 \vee y > 0]$

88 $y = \sqrt{2^x + 1}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y > 1]$

89 $y = \frac{3^x + 1}{3^x}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y > 1]$

90 $y = (2^x - 1)^2$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 0]$

91 $y = \left|1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right|$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 0]$

92 $y = \frac{|x|}{x} + 3^x$ $[x \neq 0;\ -1 < y < 0 \vee y > 2]$

93 $y = \frac{1}{\sqrt{3^x - 1}}$ $[x > 0;\ y \geq 0]$

94 $y = 2^{|2+x|}$ $[\forall x \in \mathbb{R};\ y \geq 1]$

95 Indica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste la funzione

$$y = \left(\frac{a^2-4}{11-2a}\right)^x$$

e per quali valori di a la funzione è crescente. Assegna poi ad a i valori -5, 3, 4 e rappresenta, se è possibile, le funzioni ottenute.

$\left[a < -2 \vee 2 < a < \frac{11}{2};\ a < -5 \vee 3 < a < \frac{11}{2}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

Determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono crescenti.

96 $y = \left(\frac{2a+3}{a-1}\right)^x$ $[a < -4 \vee a > 1]$

97 $y = (2a^2 + 5a - 2)^x$ $\left[a < -3 \vee a > \frac{1}{2}\right]$

98 $y = (10 - a^2)^x$ $[-3 < a < 3]$

99 $y = \left(\frac{a^2 + 3a + 1}{a+1}\right)^x$ $[-2 < a < -1 \vee a > 0]$

Calcola per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono decrescenti.

100 $y = (1 - 2a)^x$ $\left[0 < a < \frac{1}{2}\right]$

101 $y = \left(\frac{2-a}{a+2}\right)^x$ $[0 < a < 2]$

102 $y = (\sqrt{2a} - 3)^x$ $\left[\frac{9}{2} < a < 8\right]$

103 $y = (a^2 + 2a - 2)^x$ $[-3 < a < -1 - \sqrt{3} \vee -1 + \sqrt{3} < a < 1]$

3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Teoria a pag. 560

104 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $2^x + 1 = 0$ è impossibile. V F

b) L'equazione $5^{2-x} - \frac{1}{5} = 0$ ha per soluzione 3. V F

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$. V F

d) $2^{-x} + 2^x = 0$ è un'equazione impossibile. V F

e) $2 \cdot 4^{x-1} = 0$ ha per soluzione 1. V F

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

105 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$; b) $75 \cdot 5^{3x-2} - 5^{3x+1} = -50$; c) $6 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 7^x - 2^x$.

a) Poiché $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, l'equazione diventa:

$$3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2}.$$

Applichiamo la seconda proprietà delle potenze:

$$3^x = 3^{\frac{1}{2}-2} \to 3^x = 3^{-\frac{3}{2}}.$$

Se due potenze di ugual base sono uguali, devono essere uguali anche i loro esponenti, quindi:

$$x = -\frac{3}{2}.$$

b) Per le proprietà delle potenze:

$$75 \cdot \frac{5^{3x}}{25} - 5 \cdot 5^{3x} = -50 \to 3 \cdot 5^{3x} - 5 \cdot 5^{3x} = -50.$$

Raccogliamo 5^{3x}:

$$(3-5) \cdot 5^{3x} = -50 \quad \to \quad -2 \cdot 5^{3x} = -50.$$

Dividiamo entrambi i membri per -2:

$$5^{3x} = 25 \quad \to \quad 5^{3x} = 5^2 \quad \to \quad 3x = 2.$$

La soluzione dell'equazione data è $x = \frac{2}{3}$.

c) Applichiamo la prima proprietà delle potenze ed eseguiamo i calcoli:

$$6 \cdot 2^3 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x - 2^x \to 48 \cdot 2^x + 2^x = 4 \cdot 7^x \to$$
$$\to 49 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x.$$

Dividiamo entrambi i membri per $49 \cdot 7^x$ e applichiamo la quinta proprietà delle potenze:

$$\frac{2^x}{7^x} = \frac{4}{49} \to \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^2.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 2$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

106 $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{9}{2}\right]$

107 $5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[x = -\frac{3}{2}\right]$

108 $3^x = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ $\left[x = \frac{9}{4}\right]$

109 $4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{3}{4}\right]$

110 $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{3125}$ $[x = -15]$

111 $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[x = -\frac{1}{2}\right]$

112 $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ $\left[x = \frac{5}{6}\right]$

113 $2^x = 8 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{7}{2}\right]$

114 $\sqrt[3]{5^x} = 25$ $[x = 6]$

115 $3^x \cdot 27 = 9^{2x}$ $[x = 1]$

116 $t^2 \cdot t^{x+1} = \frac{t^{6x}}{t^5}$ $(t > 0)$ $\left[x = \frac{8}{5}\right]$

117 $2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ $[x = 2]$

118 $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{5}{4}\right]$

119 $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ $[x = 6]$

120 $9^{x+2} = \sqrt[3]{3^{x+7}}$ $[x = -1]$

121 $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

122 $8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[x = \frac{3}{4}\right]$

123 $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ $[x = 3]$

124 $3^{x+2} = 2^{2x+4}$ $[x = -2]$

125 $4^{x+1} + 3^x = 0$ [impossibile]

126 $26 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x + 2^x$ $[x = 2]$

127 $21 \cdot 3^x - 2^{x+3} = 3^{x+1}$ $[x = -2]$

128 $6 \cdot 3^{x+2} + 64 \cdot 2^{x-2} = 5 \cdot 3^{x+3}$ $[x = -4]$

129 $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[x = 2]$

130 $5^x \cdot 25^x = \frac{1}{5}$ $\left[x = -\frac{1}{3}\right]$

131 $3^x - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}} = 0$ $\left[x = \frac{21}{10}\right]$

132 $3^{3(x+2)} = 9^{\frac{1}{x}+1}$ $\left[x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}\right]$

133 $2^x + 2^{x+1} = -2^{x-1} + 7$ $[x = 1]$

134 $\frac{2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2}}{8 \cdot 2^{x+3}} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ $\left[x = \frac{28}{15}\right]$

135 $\frac{4^{2-x} \cdot 2^{x+3}}{16^x} = \frac{1}{8}$ $[x = 2]$

136 $\sqrt{27\sqrt{9^x}} = 3^{x-2} \cdot 27$ $[x = 1]$

137 $\frac{8^{2-x}}{2^{2+x}} = \frac{16^{2x-1}}{4^x}$ $\left[x = \frac{4}{5}\right]$

138 $3^{x+\frac{1}{2}} - 3^x = 9 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ $[x = 2]$

139 $(\sqrt{2})^x + (\sqrt{2})^{x-1} = 2(\sqrt{2} + 1)$ $[x = 3]$

140 $3^{2-x} + 3^{3-x} = 12$ $[x = 1]$

141 $8^{x-\frac{2}{3}} = \sqrt{2^{x+1}}$ $[x = 1]$

142 $4^x + (2^x)^2 - 2^{2(x-2)} = 124$ $[x = 3]$

143 $7^x + 49^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \sqrt[5]{343}$ $\left[x = \frac{3}{5}\right]$

144 $4^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3 \cdot 2^{4x} = -\frac{3}{2}$ $\left[x = \frac{1}{4}\right]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

145 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione:

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15.$$

Applichiamo la seconda proprietà delle potenze $(a^x : a^y = a^{x-y})$ al termine 3^{2-x}:

$$6 \cdot 3^x - \frac{9}{3^x} = 15.$$

Poniamo $z = 3^x$ e sostituiamo:

$$6z - \frac{9}{z} = 15.$$

Dividiamo entrambi i membri per 3 e riduciamo allo stesso denominatore che eliminiamo, essendo $z = 3^x \neq 0$:

$$\frac{2z^2 - 3}{z} = \frac{5z}{z} \rightarrow 2z^2 - 3 = 5z \rightarrow 2z^2 - 5z - 3 = 0 \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = 3.$$

Ora risolviamo $3^x = z_1$ e $3^x = z_2$, cioè:

$3^x = -\frac{1}{2}$ impossibile perché una funzione esponenziale non può assumere valore negativo

$3^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1.$

L'equazione data ha per soluzione $x = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

146 $4^x = 2^x - 2$ $[S = \varnothing]$

147 $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$ $[x = 2]$

148 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ $[x = 1]$

149 $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ $[x = -1 \vee x = 2]$

150 $5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$ $[x = 0 \vee x = -2]$

151 $\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$ $[x = 2]$

152 $2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$ $[x = -2]$

153 $10^x + 10^{2-x} = 101$ $[x = 0 \vee x = 2]$

154 $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ $[x = 3]$

155 $2^{x+1} + 2^{3-x} = 17$ $[x = -1 \vee x = 3]$

156 $3^x + 3^{1-x} = 4$ $[x = 0 \vee x = 1]$

157 $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ $[x = 0 \vee x = 2]$

158 $2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$ $\left[x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{2}\right]$

159 $5^x + 5^{1-x} + 6 = 0$ $[S = \varnothing]$

160 $2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2}-x}$ $\left[x = \frac{1}{2} \vee x = 2\right]$

161 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$ $[x = -2 \vee x = -3]$

162 $-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$ $[x = 1]$

163 $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$ $[x = 0 \vee x = -1]$

164 $3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$ $[x = 2]$

165 $\frac{4}{2^x - 1} + \frac{3}{2^x + 1} = 5$ $[x = 1]$

166 $\frac{2 \cdot (3^x + 1)}{3^x} = \frac{3 \cdot (3^x + 1)}{2 \cdot 3^x + 1}$ $[S = \varnothing]$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali applicando il metodo necessario.

167 $2^{3x} + 8^x = \sqrt[5]{2}$ $\left[x = -\frac{4}{15}\right]$

168 $2^{x+2} - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 26$ $[x = 3]$

169 $5^x + 5^{-x-1} = \frac{6}{5}$ $[x = -1 \vee x = 0]$

170 $2 \cdot 7^x + 7^{1-x} = 3$ $[S = \varnothing]$

171 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \cdot 64^x = 0$ $\left[x = -\frac{5}{7}\right]$

172 $7^x \cdot \sqrt{7^x} = \frac{1}{343}$ $[x = -2]$

173 $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 = 1 - 3^x$ $[x = 2]$

174 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^{1+2x}$ $\left[x = \frac{1}{5}\right]$

175 $2^{2x-1} \cdot 3^x = \frac{1}{2 \cdot 3^x}$ $[x = 0]$

176 $\frac{5^{x+2} \cdot 25^{1-x}}{125^x} = \frac{1}{5}$ $\left[x = \frac{5}{4}\right]$

177 $27^{\frac{2}{3}x} - 3^{2x+3} + 9^{x+2} = 165$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

178 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = 0$ $[x = \pm 1]$

179 $12^{x-2} = 2\sqrt{3}$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

180 $\sqrt{3\sqrt{3}} = 3 \cdot 9^{2-x}$ $\left[x = \frac{17}{8}\right]$

181 $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^{-2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\left[x = \frac{5}{4}\right]$

182 $(27^x)^{x-4} = \frac{1}{3 \cdot (3^{4x})^2}$ $\left[x = \frac{1}{3} \vee x = 1\right]$

183 $2^{\frac{5}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{2^3} \cdot 8^{\frac{5}{6}}$ $[x = -5 \vee x = 1]$

184 $\sqrt{27^x} \cdot 9^x = \frac{1}{81\sqrt{3}}$ $\left[x = -\frac{9}{7}\right]$

185 $8^{\frac{x}{x-1}} = 16\sqrt{4^x}$ $[x = \pm 2]$

186 $\frac{9^x + 9}{3^x} = 10$ $[x = 0 \vee x = 2]$

187 $16^x - 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 = 0$ $\left[x = \frac{1}{2} \vee x = 1\right]$

188 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 3 \cdot 2^{-x}$ $[x = -2]$

189 $3^{3x} - 3^x - 3^{2x+1} + 3 = 0$ $[x = 0 \vee x = 1]$

190 $\frac{\sqrt{3^x}}{\sqrt{3^{x+1} \cdot 9^{x+2}}} = \frac{1}{9}$ $\left[x = -\frac{5}{4}\right]$

191 $\frac{\sqrt{3 \cdot \sqrt{9^x}}}{81^{x-1}} = 9^{2x+3}$ $\left[x = -\frac{1}{5}\right]$

192 $\frac{5^x}{5^x + 1} - \frac{1}{25^x - 1} = 1$ $[S = \varnothing]$

193 $\frac{(2^x)^{x-3}}{\sqrt{8^x}} = \frac{(\sqrt{2})^{3x}}{32}$ $[x = 1 \vee x = 5]$

194 $\sqrt[x+2]{25^x} \cdot \sqrt[x]{5^4} = 125$ $[x = 2]$

195 $\frac{24}{3^x - 1} - \frac{9}{3^x} = 2$ $[x = 2]$

196 $3^{-x} + \frac{3^x + 2}{3^x + 6} = \frac{24}{3^{2x} + 6 \cdot 3^x}$ $[x = 1]$

197 $1 + 26 \cdot 3^{\frac{1}{2}x - 2} = 3^{x-1}$ $[x = 4]$

198 $|8^x - 2| = \sqrt{2^{3x}}$ $\left[x = \frac{2}{3} \vee x = 0\right]$

199 $4^{\sqrt{x+2}} + 6 = 4^{2 - \sqrt{x+2}}$ $\left[x = -\frac{7}{4}\right]$

200 $10^x - 2^x - 5^x + 1 = 0$ $[x = 0]$

201 $25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-x} - 10\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 1\right] = 4\left(\frac{5}{2}\right)^x$ $[x = 1]$

I sistemi con equazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi.

202 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2^{x-y} = 64 \end{cases}$ $[(3; -3)]$

203 $\begin{cases} 2^x + y = 0 \\ 4^x + y = 2 \end{cases}$ $[(1; -2)]$

204 $\begin{cases} y - 2^x = 0 \\ 5y = 4^x + 4 \end{cases}$ $[(0; 1); (2; 4)]$

205 $\begin{cases} 9^{x-y} \cdot 27^y = 1 \\ 4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 32 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{2}\right)\right]$

206 $\begin{cases} 3^x \cdot \sqrt{81^{x-y}} = 1 \\ 25^x \cdot \sqrt{125^y} = 5 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{4}{17}; \frac{6}{17}\right)\right]$

207 $\begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ 4^x \cdot 8 = 16^{2y} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

208 $\begin{cases} 4^{y^2} - 2^{4x} = 0 \\ \frac{625^x \cdot 25^x}{\sqrt{125}} = \left(\frac{1}{5}\right)^y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; -1\right); \left(\frac{9}{50}; \frac{3}{5}\right)\right]$

209 $\begin{cases} 36 \cdot 6^{x-y} = 6^{2x} \\ 49^x \cdot \sqrt{7^y} = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)\right]$

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

▶ Teoria a pag. 561

210 VERO O FALSO?

a) $5^x < \frac{1}{25}$ ha per soluzione $x < -2$. V F

b) $a^4 > a^2$ è sempre vera. V F

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x} > 1$ se $x < 0$. V F

d) $1^x > 1^4$ è vera per $x > 4$. V F

e) $5^{-x} + 7^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. V F

f) $6^x < -6$ se $x < -1$. V F

211 CACCIA ALL'ERRORE

Ognuna delle seguenti proposizioni è falsa. Individua l'errore.

a) $x^{-\frac{1}{3}} < x^{-\frac{2}{3}}$ se $x > 1$.

b) Se $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$, allora $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

c) Se $a^2 < b^2$, allora $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) $x^4 < x^2$ non è mai vera.

e) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{6}{7}}$.

f) $3^x > 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

212 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; b) $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

a) Dividiamo entrambi i membri per 250:

$$5^{\frac{x}{3}} > \frac{2}{250}.$$

Semplifichiamo e otteniamo:

$$5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3}.$$

Poiché le potenze hanno base maggiore di 1, dalla disequazione precedente possiamo ottenere una disequazione equivalente di ugual verso fra gli esponenti:

$$\frac{x}{3} > -3 \to x > -9.$$

b) Osserviamo che $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ sono potenze di $\frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

Poiché le potenze hanno base minore di 1, dalla disequazione precedente otteniamo una disequazione equivalente fra gli esponenti cambiando il verso:

$$3x < 4 \to x < \frac{4}{3}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali i cui membri sono riconducibili a potenze di uguale base.

213 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$ $[x < 3]$

214 $3^{2x} > 81$ $[x > 2]$

215 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{8}{27}$ $[x < -3]$

216 $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

217 $7^{x+2} > 49$ $[x > 0]$

218 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$ $[x > -2]$

219 $0,1^x < 100$ $[x > -2]$

220 $100^x < 0,001$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

221 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

222 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

223 $\frac{35}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \geq 0{,}7 \cdot 5^x$ $\left[x \leq \frac{2}{3}\right]$

224 $2 \cdot 3^{2x-1} + 9^{x+1} - 3^{2x+1} \leq \frac{60}{\sqrt[5]{3}}$ $\left[x \leq \frac{9}{10}\right]$

225 $17 \cdot \sqrt{2^{x+1}} > 34 \cdot \sqrt[3]{4^{x-3}}$ $[x < 9]$

226 $2^{x+5} \cdot 3^{x+2} \leq 8 \cdot 6^{\frac{3x-1}{x}}$ $[x < 0]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

227 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione:

$$3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7.$$

Utilizzando la seconda proprietà delle potenze:

$$3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7.$$

Introduciamo la variabile ausiliaria $z = 3^x$ e riduciamo allo stesso denominatore:

$$z - \frac{18}{z} < 7 \quad \to \quad \frac{z^2 - 7z - 18}{z} < 0.$$

Abbiamo ottenuto una disequazione fratta con denominatore sempre positivo ($z = 3^x > 0$). Quindi la disequazione è equivalente a:

$$z^2 - 7z - 18 < 0.$$

Le soluzioni sono:

$$-2 < z < 9.$$

Ora sostituiamo z con 3^x:

$$-2 < 3^x < 3^2.$$

Questa disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3^x > -2 \\ 3^x < 3^2 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione tutti gli x reali, la seconda $x < 2$.
Le soluzioni comuni (e quindi le soluzioni della disequazione assegnata) sono:

$$x < 2.$$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali con l'uso di un'incognita ausiliaria.

228 $2 \cdot 3^{-x} - 3^x \geq 1$ $[x \leq 0]$

229 $7^x - 6 > 7^{1-x}$ $[x > 1]$

230 $-4^x - 3 \cdot 2^x > 2^{2x} - 2^x$ $[S = \varnothing]$

231 $34\left(\frac{3}{5}\right)^x < 25\left(\frac{9}{25}\right)^x + 9$ $[x < 0 \vee x > 2]$

232 $9\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \leq 0$ $[S = \varnothing]$

233 $(0{,}01)^x - 7(0{,}1)^x - 30 \geq 0$ $[x \leq -1]$

234 $\frac{5}{7}(0{,}2)^x + \frac{7}{5} - \frac{2}{35}(0{,}2)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 2]$

235 $5^{\frac{2}{x}} - \frac{26}{25}5^{\frac{1}{x}} > -\frac{1}{25}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 0\right]$

236 $\frac{1}{3^x - 9} - \frac{1}{3^x + 1} > 0$ $[x > 2]$

237 $\frac{-6}{2^x - 2} + \frac{9}{2^x - 1} < 0$ $[x < 0 \vee 1 < x < 2]$

Risolvi le seguenti disequazioni applicando il metodo necessario.

238 $4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$ $[x < 2]$

239 $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 \geq 1 - 3^x$ $[x \geq 2]$

240 $\frac{9 \cdot 3^{-x}}{9^x + 3^{2x}} > \frac{27}{2}$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

241 $(2^{x+2})^2 \cdot 3^x < \frac{2}{3^{x+3}}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

242 $\frac{7^{2\sqrt{2x^{2-x}}}}{\sqrt{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}} \geq 0$ $[x < 0 \vee x > 2]$

243 $\frac{\sqrt{3^{6x} : 3^2}}{3^7} < \left|-3^{-x}\right|$ $[x < 2]$

244 $2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}$ $[x > 2]$

245 $2^x < \frac{7^{x+1}}{2}$ $[x > -1]$

246 $16 \cdot 4^{2x} < 3^{x+1}$ $[x < -1]$

247 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 14$ $[x > 1]$

248 $\sqrt{2 \cdot 6^x + 7} \leq 6^x + 1$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

249 $|2 \cdot 9^x - 1| > 5$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

250 $|16^x - 4| \geq 4 + 2 \cdot 4^x$ $[x \geq 1]$

251 $3^x - 9 < \sqrt{9^x - 9}$ $[x \geq 1]$

252 $(3^{2-x} - 27) \cdot \left(\frac{1}{2} - 4^x\right) \geq 0$ $\left[x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}\right]$

253 $4^x(4^{x+1} - 33) > -8$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{3}{2}\right]$

254 $\dfrac{2^{3x} - 8 + 3 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1}}{\sqrt{4^x + 3^{-x} + 10}} \geq 0$ $[x \geq 1]$

255 $\left|\dfrac{4^{-x}}{2^{x+2} : 2^6}\right| < 1$ $\left[x > \frac{4}{3}\right]$

256 $\left|\dfrac{3 \cdot 5^{x+1} + 5}{5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1}\right| < 5$ $[x > 1]$

257 $\dfrac{5^{\frac{4}{3}x+3}}{\sqrt{49^{x+2}}} \leq \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{25^x}}{\sqrt[3]{7^x}}$ $\left[x \geq -\frac{9}{2}\right]$

258 $\sqrt{4^x \cdot 2^x + \sqrt{8^x - 1}} \leq \sqrt{2^{3x+1} - 1}$ $\left[x = 0 \vee x \geq \frac{1}{3}\right]$

259 $\dfrac{8^{1+x} + 8^x}{9} \geq 4^{1+2x} + \dfrac{16}{4^{1-2x}}$ $[x \leq -3]$

260 $\dfrac{2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2}{(25^x - 5) \cdot (81 \cdot 3^x - 3)} \leq 0$ $\left[-3 < x \leq -1 \vee \frac{1}{2} < x \leq 1\right]$

261 $\dfrac{5}{3^x - 3} + \dfrac{2 \cdot 3^x}{3^x + 3} \geq \dfrac{18 - 2 \cdot 9^x}{9^x - 9}$ $[x \leq 0 \vee x > 1]$

262 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-3}} \cdot \sqrt[x]{4} - 1 \geq 0$ $[x = 2]$

263 $\dfrac{3^x - 81}{(4^{2x+1} - 32)\sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leq 0$ $[3 < x \leq 4]$

264 $\dfrac{20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}}{(2^x - 1)(2^x - 4)} > 0$ $\left[\frac{1}{36} < x < 2\right]$

265 $\sqrt[2x+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \sqrt[x+2]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}}$ $\left[x > -\frac{3}{2}, x \in \mathbb{Z}\right]$

266 $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^x \leq \sqrt[x+2]{\frac{5}{4}}$ $[-2 < x \leq \sqrt{5}, x \in \mathbb{Z}]$

267 $\sqrt[2x]{|4^x - 12|} \geq \sqrt[x]{2}$ $[x \in \mathbb{N} - \{0\}]$

I sistemi con disequazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

268 $\begin{cases} 3^{2x-1} > 3 \\ 1 - 5^{x^2-4} \geq 0 \end{cases}$ $[1 < x \leq 2]$

269 $\begin{cases} 5^{2x-1} - 25 > 0 \\ \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1} \geq 1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

270 $\begin{cases} 4^{3x+2} > 2 \\ 2^x(2^x - 1) < 2 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

271 $\begin{cases} 3^x - 3^{3-x} + 6 \geq 0 \\ |2^x - 1| < 3 \end{cases}$ $[1 \leq x < 2]$

272 $\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{49^x} - 7)(3^x - 1)}{64 - 2^x} \geq 0 \\ \sqrt{1 + 4^x} > \dfrac{1}{\sqrt{4^x - 1}} \end{cases}$ $[1 \leq x < 6]$

273 $\begin{cases} 7^x \cdot \sqrt[x]{49} : \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x-5}} - 1 > 0 \\ \sqrt[3]{1 - 3 \cdot 2^x \cdot (2^x - 1)} - 2^x + 1 < 0 \end{cases}$ $[x = 1 \vee x > 3, x \in \mathbb{N}]$

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Teoria a pag. 562

274 VERO O FALSO?

a) Se $3^x = 11$, allora $x = \log_{11} 3$. V F

b) Se $\log_9 a = -2$, allora $a = (-2)^9$. V F

c) $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$. V F

d) $\log_{-2}(-8) = 3$ perché $(-2)^3 = -8$. V F

e) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$. V F

275 VERO O FALSO?

a) Se $a < 0$, $\log_{-a}(-\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3}$. V F

b) Se $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-\frac{1}{3}}$, allora $\log_3 x = -1$. V F

c) $\log_a 1 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. V F

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$. V F

e) $\log_x x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

Riscrivi, usando i logaritmi, le seguenti uguaglianze.

276 $2^5 = 32$; $3^4 = 81$; $5^2 = 25$; $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $10^0 = 1$.

277 $7^x = 2$; $a^4 = 6$; $2^9 = b$; $6^{-5} = b$; $a^{-2} = 8$.

Riscrivi, usando le potenze, le seguenti uguaglianze.

278 $\log_7 49 = 2$; $\log_{11} 121 = 2$; $\log_{10} 10\,000 = 4$; $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

279 $\log_a 3 = 7$; $\log_2 b = -\frac{1}{2}$; $\log_5 3 = x$; $\log_2 a = -5$.

280 Fra i seguenti logaritmi elimina quelli privi di significato e spiega il motivo della scelta.

a) $\log_3(-3)$; $\log_2 82$; $\log_2(-1)$; $\log_3 0{,}6$; $\log_5 5$; $\log_{-2}(-8)$.

b) $\log_2(-2)$; $\log_{11}(-0{,}01)$; $\log_1 100$; $\log_5 0$; $\log_8 10$; $\log_{\sqrt{3}} 3$.

281 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ applicando la definizione di logaritmo.

Sappiamo che l'uguaglianza $x = \log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ è equivalente a:

$$2^x = 4 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Ricordando che $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, possiamo scrivere $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, quindi:

$$2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

Applichiamo la prima proprietà delle potenze:

$$2^x = 2^{\frac{7}{3}} \rightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Quindi $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$.

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

282 $\log_3 243$; $\log_2 64$; $\log_3 27$; $\log_5 25$. [5; 6; 3; 2]

283 $\log_2 16$; $\log_3 9$; $\log_5 125$; $\log_7 49$. [4; 2; 3; 2]

284 $\log 100$; $\log 1000$; $\log_{11} 121$; $\log_7 343$. $[2; 3; 2; 3]$

285 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{10} 10$; $\log_2 1$; $\log_{\frac{5}{6}} 1$; $\log_5 5$; $\log_2 2$. $[1; 1; 0; 0; 1; 1]$

286 $\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_5 0{,}04$; $\log_{745} 1$. $\left[-\frac{3}{2}; -4; -2; 0\right]$

287 $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}}$; $\log_3(3\cdot\sqrt[4]{3})$; $\log_2 \frac{\sqrt[5]{4}}{2}$; $\log_6(6\cdot\sqrt[3]{6})$. $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{3}\right]$

288 $\log_7(7\sqrt{7})$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\log_2(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2})$; $\log \frac{1}{\sqrt[13]{10}}$. $\left[\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{13}\right]$

289 $\log_5 \sqrt[5]{5}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\log_3 \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$; $\log_5\left(0{,}2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; -\frac{3}{2}\right]$

290 $\log_3(27\cdot\sqrt{3})$; $\log_4 \frac{1}{2}$; $\log_{25} \frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; $\log_8 \sqrt[117]{4}$. $\left[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{351}\right]$

291 $\log_{625} \frac{\sqrt[3]{5}}{25}$; $\log_{16} \frac{2}{\sqrt[7]{2}}$; $\log(1000\cdot\sqrt[8]{10})$; $\log_{49} \sqrt[5]{\frac{1}{7}}$. $\left[-\frac{5}{12}; \frac{3}{14}; \frac{25}{8}; -\frac{1}{10}\right]$

292 $\log_{\sqrt{2}} 1$; $\log_{\sqrt{2}} 256$; $\log_{2\sqrt{2}} 2$; $\log_{0,1} 10$. $\left[0; 16; \frac{2}{3}; -1\right]$

293 $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8}$; $\log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[4]{27}$; $\log_{32} \sqrt[5]{8}$; $\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27}$. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{3}{25}; 3\right]$

294 $\log_{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{\sqrt[4]{8}}{4}} 32$; $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[4]{27}$; $\log_{\frac{\sqrt{3}}{9}} 27$. $\left[-4; -4; \frac{9}{4}; -2\right]$

295 $\log_a a$; $\log_{2a}(4a^2)$; $\log_{\sqrt{a}} a^3$; $\log_a(a\sqrt{a})$. $\left[1; 2; 6; \frac{3}{2}\right]$

296 $\log_{a+1}(a^3+3a^2+3a+1)$; $\log_{\frac{2}{a}} \frac{a^3}{8}$; $\log_{2+\frac{1}{a}} \frac{2a+1}{a}$. $[3; -3; 1]$

297 ESERCIZIO GUIDA

Data l'uguaglianza $\log_5 b = 2$, calcoliamo il valore di b, applicando la definizione di logaritmo.

Ricordiamo che, se $x = \log_a b$, allora $a^x = b$. Nel nostro caso, quindi, possiamo scrivere

$$5^2 = b$$

e concludere che:

$$b = 25.$$

Calcola il valore dell'argomento b, usando la definizione di logaritmo.

298 $\log_3 b = 3$; $\log_5 b = 3$; $\log b = 4$; $\log_2 b = 5$. $[27; 125; 10\,000; 32]$

299 $\log_2 b = 6$; $\log_6 b = 3$; $\log_2 b = 1$; $\log_3 b = 4$. $[64; 216; 2; 81]$

300 $\log_3 b = -1$; $\log_2 b = -1$; $\log_2 b = -2$; $\log_5 b = -2$. $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{25}\right]$

301 $\log_2 b = \frac{1}{2}$; $\log_3 b = \frac{1}{4}$; $\log_4 b = \frac{1}{2}$; $\log_5 b = \frac{1}{3}$. $\left[\sqrt{2}; \sqrt[4]{3}; 2; \sqrt[3]{5}\right]$

302 $\log_3 b = 0$; $\log_{0,4} b = 1$; $\log_5 b = -\frac{1}{3}$; $\log_{32} b = -\frac{1}{4}$. $\left[1; 0{,}4; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right]$

303 $\log_4 b = -2$; $\log_{\frac{2}{3}} b = -\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} b = -2$; $\log_5 b = -\frac{2}{5}$. $\left[\frac{1}{16}; \sqrt{\frac{3}{2}}; 4; \sqrt[5]{\frac{1}{25}}\right]$

304 $\log_{\sqrt{3}} b = 3$; $\log_{20} b = -\frac{11}{7}$; $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} b = 2$; $\log_{11} b = -3$. $\left[3\sqrt{3}; \sqrt[7]{\frac{1}{20^{11}}}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1331}\right]$

305 $\log b = 2$; $\log(1-b) = -1$; $\log b^3 = 2$; $\log \frac{b}{3} = 1$. $\left[100; \frac{9}{10}; \sqrt[3]{100}; 30\right]$

306 ESERCIZIO GUIDA

Data l'uguaglianza $\log_a 16 = 2$, calcoliamo la base a.

Applichiamo la definizione di logaritmo:

$$a^2 = 16 \;\rightarrow\; a = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

La base di un logaritmo può essere solo positiva e diversa da 1, quindi concludiamo che:

$$a = 4.$$

Calcola il valore della base a usando la definizione di logaritmo.

307 $\log_a 9 = 2;$ $\quad \log_a 125 = 3;$ $\quad \log_a 100 = 2;$ $\quad \log_a 2 = 1.$ $\quad [3; 5; 10; 2]$

308 $\log_a 169 = 2;$ $\quad \log_a 27 = 3;$ $\quad \log_a \frac{1}{4} = 2;$ $\quad \log_a \frac{16}{81} = 4.$ $\quad \left[13; 3; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$

309 $\log_a \frac{1}{4} = -2;$ $\quad \log_a \frac{8}{27} = -3;$ $\quad \log_a \frac{1}{81} = -4;$ $\quad \log_a \frac{4}{5} = -1.$ $\quad \left[2; \frac{3}{2}; 3; \frac{5}{4}\right]$

310 $\log_a 5 = 1;$ $\quad \log_a 100 = -2;$ $\quad \log_a 4 = -2;$ $\quad \log_a \frac{1}{49} = -2.$ $\quad \left[5; \frac{1}{10}; \frac{1}{2}; 7\right]$

311 $\log_a 5 = -1;$ $\quad \log_a 3 = -2;$ $\quad \log_a 4 = \frac{1}{2};$ $\quad \log_a \frac{1}{2} = -2.$ $\quad \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{\sqrt{3}}; 16; \sqrt{2}\right]$

312 $\log_a (2a - 3) = 1;$ $\quad \log_a 3 = -11;$ $\quad \log_a 6 = 36;$ $\quad \log_a (2\sqrt{a} - 2) = \frac{1}{2}.$ $\quad \left[3; \frac{1}{3^{\frac{1}{11}}}; \sqrt[36]{6}; 4\right]$

313 $\log_a 5 = -2;$ $\quad \log_a 64 = 5;$ $\quad \log_a \frac{1}{100} = -2;$ $\quad \log_a 8 = 3.$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 2 \cdot \sqrt[5]{2}; 10; 2\right]$

314 $\log_a \sqrt{2} = 2;$ $\quad \log_a \frac{1}{64} = -2;$ $\quad \log_a (3 + 2\sqrt{2}) = 2;$ $\quad \log_a 64 = 4.$ $\quad [\sqrt[4]{2}; 8; 1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

315 $\log_{a+1} 2 = -1;$ $\quad \log_{a+2} 10 = 1;$ $\quad \log_{\sqrt{a}+1} 4 = 2;$ $\quad \log_{a^2-a}(-2a) = 1.$ $\quad \left[-\frac{1}{2}; 8; 4; -1\right]$

316 VERO O FALSO?

a) $2^{\log_2 3} = \log_3 2$ V F

b) $7^{\log_{10} 7} = 10$ V F

c) $9^{\log_9 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ V F

d) $5^{-\log_5 2} = \frac{1}{2}$ V F

e) $\log_2 (6^{\log_6 2}) = 1$ V F

f) Se $\log_2 x > \log_2 3$, allora $x > 3$. V F

g) $\log_{\frac{1}{4}} 6 < \log_{\frac{1}{4}} 3$ V F

317 COMPLETA

a) $7^{\log_{\ldots} 2} = 2$

b) $\log_{\ldots} 9 = -2$

c) $\log_2 \ldots = 0$

d) $\log_5 (2^{\log_2 \ldots}) = 2$

e) $\log_7 \ldots + \log_4 1 = 1$

f) $\log_{\ldots} (3^{\log_3 10}) = 1$

g) $\log_6 6 - \log_6 \ldots = 1$

COMPLETA **inserendo $>$ o $<$ fra le seguenti coppie di logaritmi.**

318 $\log 11 \ldots \log 3;$ $\quad \log 5 \ldots \log 8;$ $\quad \log 100 \ldots \log 5.$

319 $\log_2 14 \ldots \log_2 11;$ $\quad \log_{0,4} 6 \ldots \log_{0,4} 9;$ $\quad \log_3 23 \ldots \log_3 116.$

320 $\log_{\frac{2}{3}} \frac{7}{6} \ldots \log_{\frac{2}{3}} \frac{11}{9}$; $\log_{\frac{7}{9}} 98 \ldots \log_{\frac{7}{9}} 97$; $\log_{\frac{6}{5}} 48 \ldots \log_{\frac{6}{5}} 7$.

321 Metti in ordine crescente i seguenti logaritmi:

$\log_{\frac{1}{2}} 7$, $\log_2 7$, $\log_6 7$, $\log_7 7$, $\log_{\frac{1}{3}} 7$.

322 Se $\log_{2n}(1944) = \log_n(486\sqrt{2})$, calcola n^6.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 1996)

$[3^{20} \cdot 2^6]$

323 **TEST** Quanti distinti numeri primi sono fattori di N se $\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11$?

A 1 B 4 C 17 D 2^{11} E Nessuno dei precedenti.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Teoria a pag. 563

324 **VERO O FALSO?**

a) $2\log 5 - \log 4 = 2\log \frac{5}{2}$ V F

b) $\frac{\log a}{\log b} = \log \frac{a}{b}$ V F

c) $\log_2 \sqrt{a^n} = \frac{n}{2}\log_2 a$ V F

d) $\log_2 2b = 1 + \log_2 b$ V F

325 **VERO O FALSO?**

a) $\log_8 a^4 b = \log_2 a + \log_8 b$ V F

b) $(\log_3 a)^2 = 2\log_3 a$ V F

c) $\frac{\log_5 7}{2} = \log_5 \sqrt{7}$ V F

d) $\log_2(a+b) = \log_2 a \cdot \log_2 b$ V F

326 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando le proprietà dei logaritmi sviluppiamo l'espressione:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}}.$$

Nell'espressione l'argomento del logaritmo si presenta sotto forma di frazione; applichiamo per prima la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}} = \log_{\frac{1}{3}}(5a^6) - \log_{\frac{1}{3}}(13\sqrt[4]{19}).$$

Ai logaritmi di $5a^6$ e $13\sqrt[4]{19}$ applichiamo la proprietà del logaritmo del prodotto e otteniamo:

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} a^6 - \left(\log_{\frac{1}{3}} 13 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19}\right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} a^6 - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19}.$$

Applichiamo infine ai logaritmi di a^6 e $\sqrt[4]{19}$ la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$\log_{\frac{1}{3}} a^6 = 6\log_{\frac{1}{3}} a \quad \text{e} \quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{19} = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

Otteniamo così:

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 + 6\log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

L'espressione assegnata vale:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{5a^6}{13\sqrt[4]{19}} = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 6\log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} 13 - \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} 19.$$

Nell'ipotesi in cui tutti gli argomenti dei logaritmi con cui operi siano positivi, sviluppa le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

327 $\log\frac{3}{5a}$ $\quad[\log 3 - \log 5 - \log a]$

328 $\log_5(3ab^2)$ $\quad[\log_5 3 + \log_5 a + 2\log_5 b]$

329 $\log_{\frac{2}{3}}\frac{3\sqrt{a}}{b}$ $\quad\left[\log_{\frac{2}{3}} 3 + \frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}} a - \log_{\frac{2}{3}} b\right]$

330 $\log_2\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad\left[\frac{5}{6}\right]$

331 $\log\frac{5a}{b^4}\sqrt[7]{b}$ $\quad\left[\log 5 + \log a - \frac{27}{7}\log b\right]$

332 $\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}$ $\quad\left[-\frac{31}{5}\right]$

333 $\log_5\frac{5}{61\sqrt[4]{91}}$ $\quad\left[1 - \log_5 61 - \frac{1}{4}\log_5 91\right]$

334 $\log(a^4b^5\sqrt{7})$ $\quad\left[4\log a + 5\log b + \frac{1}{2}\log 7\right]$

335 $\log\frac{(a+2)^3}{a}\sqrt{a}$ $\quad\left[3\log(a+2) - \frac{1}{2}\log a\right]$

336 $\log\frac{a^3(a^2+1)}{b^2}$ $\quad[3\log a + \log(a^2+1) - 2\log b]$

337 $\log_5\left(\frac{3\sqrt[6]{a}}{\sqrt[27]{b}}\right)$ $\quad\left[\log_5 3 + \frac{1}{6}\log_5 a - \frac{1}{27}\log_5 b\right]$

338 $\log\frac{(\sqrt{2}+1)^3}{17}$ $\quad[3\log(\sqrt{2}+1) - \log 17]$

---

339 $\log_2\frac{b(a-1)^2}{a\sqrt[6]{2a^2}}$ $\quad\left[\log_2 b + 2\log_2(a-1) - \frac{4}{3}\log_2 a - \frac{1}{6}\right]$

340 $\log\left[\frac{100a^3b}{c^2}(\sqrt{ab})^3\right]$ $\quad\left[2 + \frac{9}{2}\log a + \frac{5}{2}\log b - 2\log c\right]$

341 $\log_3\frac{a^2\sqrt{b}}{9\sqrt[3]{ab}}$ $\quad\left[\frac{5}{3}\log_3 a + \frac{1}{6}\log_3 b - 2\right]$

342 $\log_5\frac{25\sqrt[4]{b^3}\,a}{\sqrt[3]{c^2}}$ $\quad\left[2 + \frac{3}{4}\log_5 b + \log_5 a - \frac{2}{3}\log_5 c\right]$

343 $\log\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}$ $\quad\left[\frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log b\right]$

344 $\log\frac{b\sqrt[3]{(a+3b)8}}{\sqrt{a+3b}}$ $\quad\left[\log b - \frac{1}{6}\log(a+3b) + \log 2\right]$

345 **ESERCIZIO GUIDA**

Applichiamo le proprietà dei logaritmi per semplificare l'espressione

$$4\log_5 a + \log_5 17 - \frac{3}{7}\log_5 b, \quad \text{con } a, b > 0,$$

fino a ottenere un unico logaritmo.

Applichiamo la proprietà del logaritmo di una potenza:

$$4\log_5 a = \log_5 a^4 \quad \text{e} \quad \frac{3}{7}\log_5 b = \log_5 b^{\frac{3}{7}} = \log_5\sqrt[7]{b^3}.$$

Sostituiamo nell'espressione iniziale e otteniamo:

$\log_5 a^4 + \log_5 17 - \log_5 \sqrt[7]{b^3}$.

Applichiamo ora ai primi due addendi la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$\log_5 17a^4 - \log_5 \sqrt[7]{b^3}$.

Infine applichiamo la proprietà del logaritmo di un quoziente:

$\log_5 \dfrac{17a^4}{\sqrt[7]{b^3}}$.

L'espressione assegnata vale $\log_5 \dfrac{17a^4}{\sqrt[7]{b^3}}$.

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, nell'ipotesi che tutti gli argomenti dei logaritmi siano positivi.

346 $\log 3 + \log 7 - \log 6$ $\left[\log \dfrac{7}{2}\right]$

347 $\log_2 x - \log_2(x-1) + \log_2 5$ $\left[\log_2 \dfrac{5x}{x-1}\right]$

348 $\log_3(x^2+1) - \log_3(x-3)$ $\left[\log_3 \dfrac{x^2+1}{x-3}\right]$

349 $\log_3 5 + 4\cdot\log_3 t$ $[\log_3(5t^4)]$

350 $4\log_{\frac{2}{5}} a + \log_{\frac{2}{5}} b$ $\left[\log_{\frac{2}{5}} a^4 b\right]$

351 $\dfrac{1}{4}\log a - \dfrac{1}{3}\log b$ $\left[\log \dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right]$

352 $\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5$ $\left[\log_3 \dfrac{ab}{5}\right]$

353 $\log_5 h - 2\log_5 b + \dfrac{1}{2}\log_5 6$ $\left[\log_5 \dfrac{h\sqrt{6}}{b^2}\right]$

---

354 $\dfrac{1}{2}\log_3 x + 2\log_3(x+1) - \log_3 7$ $\left[\log_3 \dfrac{\sqrt{x}\,(x+1)^2}{7}\right]$

355 $\dfrac{1}{2}(\log 7 + \log x - \log 3)$ $\left[\log \sqrt{\dfrac{7x}{3}}\right]$

356 $\dfrac{1}{3}(\log a + 2\log b) - 3(\log k + \log h)$ $\left[\log \dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{(kh)^3}\right]$

357 $\log_2(x-3) - \dfrac{1}{4}\log_2(x-1) - 1$ $\left[\log_2 \dfrac{x-3}{2\sqrt[4]{x-1}}\right]$

358 $\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x+3)$ $\left[\log \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+3}\right]$

359 $\log_2(3x-1) + 3\cdot\log_2(x-1) - 4\cdot\log_2(x-2)$ $\left[\log_2 \dfrac{(3x-1)\cdot(x-1)^3}{(x-2)^4}\right]$

360 $3\log b - 2\log b^2 + \log b^3 - 2\log(b+1)$ $\left[\log \dfrac{b^2}{(b+1)^2}\right]$

361 $\log_7 a - 2\log_7 b + \dfrac{1}{2}\log_7 c$ $\left[\log_7 \dfrac{a\cdot\sqrt{c}}{b^2}\right]$

362 $2\log(x^2-1) - \log(x+1) - \log(x-1)$ $[\log(x+1)(x-1)]$

363 $4\log_2 3 - \dfrac{1}{2}\log_2 h + \dfrac{4}{5}\log_2 k$ $\left[\log_2 \dfrac{81\cdot\sqrt[5]{k^4}}{\sqrt{h}}\right]$

364 $\dfrac{1}{2}[\log_2 a + 2\log_2(a+4)] - \log_2(a-1)$ $\left[\log_2 \dfrac{\sqrt{a}\cdot(a+4)}{a-1}\right]$

365 $4 \cdot [\log a + \log(a+5)] - 2\log(a-5)$ $\left[\log \dfrac{a^4 \cdot (a+5)^4}{(a-5)^2}\right]$

366 $3 \cdot [\log_2 b - 2 \cdot (\log_2 c + \log_2 a)]$ $\left[\log_2 \dfrac{b^3}{c^6 a^6}\right]$

367 $\dfrac{1}{3} \cdot [\log_3 27 - 2 \cdot (\log_3 a^2 - \log_3 b^2)]$ $\left[\log_3\left(3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b^4}{a^4}}\right)\right]$

Identità condizionate

Trova per quali condizioni le seguenti identità sono vere.

368 a) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2(x^2-1)$.

b) $\log_2 \sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3}\log_2 x$.

c) $2\log(x^2+x+6) = \log(x^2+x+6)^2$.

d) $\log|x^2-x| = \log|x| + \log|x-1|$.

[a) $x > 1$; b) $x > 0$; c) $\forall x \in \mathbb{R}$; d) $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1$]

369 a) $\log\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} = \log\sqrt{x} - \log\sqrt{x+2}$.

b) $\log\dfrac{x^2+9}{x^2+1} = \log(x^2+9) - \log(x^2+1)$.

c) $\log x^4 = 4\log|x|$.

d) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x^2-1}{x} = \log\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$.

[a) $x > 0$; b) $\forall x \in \mathbb{R}$; c) $x \neq 0$; d) $-1 < x < 0 \ \vee \ x > 1$]

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

370 $2^{-\log_2 5}$; $81^{\log_3 2}$; $7^{-1+\log_7 2}$. $\left[\dfrac{1}{5}; 16; \dfrac{2}{7}\right]$

371 $4^{-\log_2 3}$; $25^{-\log_5 10}$; $4^{3-\log_2 7}$. $\left[\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{100}; \dfrac{64}{49}\right]$

Dimostra, senza utilizzare la calcolatrice, le seguenti disuguaglianze.

372 $\log_4 5 + 4\log_4 3 > 3$

373 $2^{2\log_2 3} + \log_2 \sqrt[3]{4} > 5^{\log_5 8}$

374 **TEST** L'espressione $7^{2+\log_7 x}$ è uguale a:

A $49x$. B $7^2 + x$. C $49 + \log_7 x$. D $49\log_7 x$. E $7x$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2003)

375 **TEST** Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A $\log_3 4 + \log_3 5 = 2$

B $\log_3 4 + \log_3 5 > 3$

C $\log_3 4 + \log_3 5 < 3$

D Non conosco l'argomento

(*Università di Genova, Corso di laurea in Matematica, Test di autovalutazione*)

La formula del cambiamento di base

376 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo $\log_2 3$ usando il logaritmo in base 10 e calcoliamone il valore approssimato.

Utilizziamo la formula del cambiamento di base $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, in cui $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Con la calcolatrice approssimiamo log 3 e log 2 con quattro cifre decimali:

$$\log 3 \simeq 0,4771; \quad \log 2 \simeq 0,3010.$$

La risposta è: $\log_2 3 \simeq \dfrac{0,4771}{0,3010} \simeq 1,5850.$

Trasforma i seguenti logaritmi in logaritmi in base 10 e approssima con quattro cifre decimali i valori trovati.

377 $\log_{0,11} 7$; $\log_4 61$; $\log_{2,5} 0,10$; $\log_3 99$; $\log_{31} 543$.

378 $\log_5 0,23$; $\log_{0,3} 0,67$; $\log_{6,4} 64$; $\log_{0,79} 50$; $\log_{40} 80$.

Semplifica le seguenti espressioni senza utilizzare la calcolatrice.

379 $\log_4 7 \cdot \log_7 16$ [2]

380 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$ [$\log_2 6$]

381 $\log_3 5 \cdot \log_{25} 9$ [1]

382 $\log_4 10 + \dfrac{1}{2\log_{10} 4} + \log_2 10$ $\left[\dfrac{7}{4}\log_2 10\right]$

383 Given that $\log_b(2) \simeq 0.5093$, $\log_b(3) \simeq 0.8072$, and $\log_b(5) \simeq 1.1826$, find approximate for the following:

a) $\log_b(15)$; c) $\log_b\left(\dfrac{6}{5}\right)$; e) $\log_b(45)$;

b) $\log_b\left(\dfrac{2}{3}\right)$; d) $\log_b(9)$; f) $\log_b(200)$.

(USA *Tacoma Community College*, *Math 115 Worksheets*, 2003)

[a) 1.9898; b) − 0.2979; c) 0.1339; d) 1.6144; e) 2.797; f) 3.8931]

384 Senza fare uso della calcolatrice valuta $\dfrac{1}{\log_2 36} + \dfrac{1}{\log_3 36}$.

(CAN *Canadian Mathematical Olympiad*, 1973)

$\left[\dfrac{1}{2}\right]$

Dimostra le seguenti uguaglianze nell'ipotesi in cui esistano i logaritmi.

385 $\log_{a^2} b^2 = \log_a b$

386 $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \log_a b$

387 $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$

388 $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

389 $\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_a \sqrt[4]{a^3}$

390 **TEST** Se $\log_2 10 = a$, allora $\log_{10} 2$ vale:

A $2a$. B $\dfrac{a}{2}$. C $5a$. D $\dfrac{a}{5}$. E $\dfrac{1}{a}$.

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2001)

391 Dimostrare che, presi tre numeri reali positivi a, b, c, con $a \neq 1$, si ha sempre $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

(*Università di Trieste, Corso di Laurea in Fisica e Matematica*, 2007)

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

▶ Teoria a pag. 567

Traccia il grafico delle seguenti funzioni logaritmiche.

392 a) $y = \log_3 x$; b) $y = \log_{0,6} x$; c) $y = \log_{0,2} x$; d) $y = \log_{23} x$; e) $y = \log_7 x$.

393 Indica quali equazioni definiscono una funzione logaritmica e quali no, motivando la risposta.

$$y = \log_4 x^{-1},\quad y = \log_4(-x),\quad y = \log_{-4} x,\quad y = \log_1 x,\quad y = \log_{-1} x,\quad y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1).$$

394 Disegna i grafici delle funzioni $y = \log_2 x^{-1}$ e $y = -\log_2 x^{-1}$.

395 Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano.

$$y = \log_2 x,\quad y = \log_2(x+1),\quad y = \log_2 x + 1.$$

Che cosa puoi notare?

396 Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente? Motiva la risposta.

a) $y = \log_4 x$; b) $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

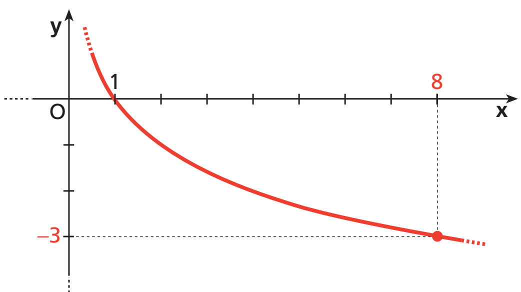
Disegna nello stesso piano cartesiano ciascuna coppia di funzioni logaritmiche.

397 $y = \log_3 x$, $y = \log_3 2x$.

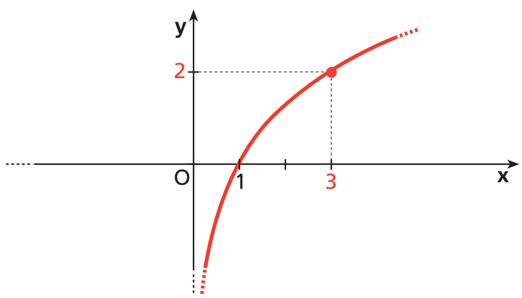
398 $y = \log_2 x$, $y = 4\log_2 x$.

Nelle figure sono disegnati i grafici di funzioni logaritmiche. Scrivi le equazioni corrispondenti.

399



400



401 **VERO O FALSO?**

a) $y = \log_{2\sqrt{2}} x$ è una funzione crescente in $\mathbb{R}$. V F

b) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ è positiva per $x > 1$. V F

c) La funzione $y = \log_2 x^2$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali. V F

d) La funzione $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ esiste per $a > 0$ e $a \neq 1$ ed è crescente per $a < 1$. V F

402 **VERO O FALSO?**

a) Le funzioni $y = \log x^4$ e $y = 4\log x$ sono identiche. V F

b) Le due equazioni $y = \ln(x^2-1)$ e $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ rappresentano la stessa funzione. V F

c) La funzione $y = \log_2 x - 1$ ha come funzione inversa $y = 2^{x+1}$. V F

d) Le funzioni $y = 2x$ e $y = 3^{\log_3 2x}$ hanno lo stesso grafico. V F

403 Let $f(x) = \ln(x+3)$. Find $f^{-1}(x)$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Spring 2001)

$[y = e^x - 3]$

404 Indica se i grafici delle seguenti funzioni sono identici:

$$y = \log_2 2x - \log_2(x-4); \qquad y = 1 + \log_2 \frac{x}{x-4}.$$

405 Dimostra che i grafici delle seguenti equazioni sono congruenti:

$$\log_4(1+2y) = 4 - x; \qquad y = 2^{-2x+7} - \frac{1}{2}.$$

Le trasformazioni geometriche e la funzione logaritmo

406 Data la funzione $y = \ln x$, scrivi l'equazione della funzione ottenuta traslandola secondo il vettore $\vec{v}(-1; 2)$ e traccia il suo grafico. $[y = \ln(x+1) + 2]$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

407 $y = \ln(x-1) + 4$; $\quad y = \log_2 x - 1$.

408 $y = \log(x-2) - 3$; $\quad y = \log_3(x+3)$.

409 $y = \ln(-x)$; $\quad y = -\ln x$.

410 $y = -\ln(-x)$; $\quad y = \ln \frac{x}{2}$.

411 $y = \frac{\ln x}{3}$; $\quad y = 2\ln x$.

412 $y = \ln 4x$; $\quad y = \frac{\ln x}{4}$.

413 $y = 3\ln\frac{x}{4}$; $\quad y = \ln(-x) + 1$.

414 $y = -3\ln x$; $\quad y = \frac{1}{2}\ln(-x)$.

415 $y = |\log_4 x|$; $\quad y = \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$.

416 $y = -|\ln x|$; $\quad y = -\ln|x|$.

417 $y = \sqrt{\ln x}$; $\quad y = (\ln x)^2$.

418 $y = \frac{1}{\log_2 x}$; $\quad y = -\ln\frac{1}{x} + 1$.

419 $y = \ln\left(\frac{e^2}{|x|}\right)$; $\quad y = \left|\ln\left(\frac{e^2}{x}\right)\right|$.

420 $y = |\log_2 x + 1|$; $\quad y = |\log|x||$.

421 $y = \frac{\ln x}{|\ln x|} + 2\ln x$; $\quad y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 4$.

422 Applica alla funzione $y = \log_2 x$ la simmetria rispetto all'asse x e al risultato applica la simmetria rispetto al punto $(-1; 3)$. Scrivi l'espressione analitica della funzione ottenuta e disegna il suo grafico.

$[y = \log_2(-x-2) + 6]$

423 Data la funzione f di equazione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, determina l'equazione della sua trasformata f' che si ottiene mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Disegna il grafico di f'. $\left[y = \log_{\frac{1}{2}} 16x^4\right]$

424 Disegna il grafico della funzione f di equazione $y = -\ln x$. Trasforma poi f mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Disegna la funzione f' ottenuta e trova i punti di intersezione del grafico di f' con gli assi. $\left[y = -2\ln\frac{x}{4}\right]$

425 Data la funzione $y = \log_4 x$, applica di seguito la traslazione di vettore $(2; -3)$, la simmetria rispetto all'asse x e la simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 5$. Rappresenta graficamente la funzione ottenuta ed esprimila analiticamente. $[y = -\log_4(8 - x) + 3]$

426 Data la funzione $y = a^x - 2$, determina a sapendo che il punto $P(2; 7)$ appartiene al suo grafico e rappresentala graficamente. Disegna poi il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e determina l'equazione della funzione corrispondente. $[a = 3;\ y = \log_3(x + 2)]$

Il dominio di funzioni contenenti funzioni logaritmiche

427 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione:

$$y = \log \frac{x+3}{x-1}.$$

È una funzione logaritmica con argomento frazionario, quindi dobbiamo imporre due condizioni:

a) denominatore della frazione diverso da 0;
b) argomento del logaritmo positivo.

La prima condizione è contenuta nella seconda. Risolviamo pertanto solo questa:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0.$$

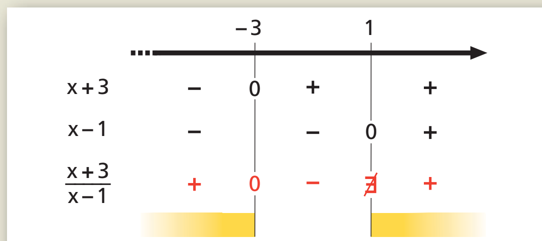
Studiamo il segno del numeratore:

$$x + 3 > 0 \quad \text{se} \quad x > -3.$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \text{se} \quad x > 1.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura sotto).



L'ultima riga, ricavata dalle precedenti con la regola dei segni, permette di giungere al risultato:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0 \quad \text{se} \quad x < -3 \lor x > 1.$$

Pertanto D: $x < -3 \lor x > 1$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

428 $y = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$ $[x < -1 \lor x > 1]$

429 $y = \log(x - 8) + \log(2x + 7)$ $[x > 8]$

430 $y = \log_2 \dfrac{x - 3}{x + 2}$ $[x < -2 \lor x > 3]$

431 $y = \log(x^3 - 1)$ $[x > 1]$

432 $y = \log(x + 5) + \log(3 - x)$ $[-5 < x < 3]$

433 $y = \ln|x^2 - 1|$ $[x \neq \pm 1]$

434 $y = \ln(3 - |x|)$ $[-3 < x < 3]$

435 $y = \ln(x^2 - 4x) + 4$ $[x < 0 \lor x > 4]$

436 $y = \log(4^x - 2) + \log(2^x - 1)$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

437 $y = \log \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ $[x > 2]$

438 $y = \sqrt{\log \dfrac{x}{x - 3}}$ $[x > 3]$

439 $y = \dfrac{x}{\log(x + 1)}$ $[x > -1 \land x \neq 0]$

440 $y = \dfrac{5}{\log(x^2 + 1) - 1}$ $[x \neq \pm 3]$

441 $y = \dfrac{\ln(x - \sqrt{x^2 - x})}{\ln(x - 3)}$ $[x > 3 \land x \neq 4]$

442 $y = \log_3 \log_2 x$ $[x > 1]$

443 $y = \dfrac{1}{\log_2 \log_3(x - 1)}$ $[x > 2 \land x \neq 4]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, indicando per ciascuna il dominio e il codominio.

444 $y = 2 + \log_2(x-1)$ $[x > 1; \forall y \in \mathbb{R}]$

445 $y = |1 - \ln x|$ $[x > 0; y \geq 0]$

446 $y = |\log_2(x+2)|$ $[x > -2; y \geq 0]$

447 $y = |\ln x| + \ln x$ $[x > 0; y \geq 0]$

448 $y = \left|\log_3 \frac{1}{3x}\right| - 1$ $[x > 0; y \geq -1]$

449 $y = -\log(|x| - 2)$ $[x < -2 \land x > 2; \forall y \in \mathbb{R}]$

450 $y = \sqrt{\ln x + 1}$ $\left[x \geq \frac{1}{e}; y \geq 0\right]$

451 $y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$ $[x > 0 \ \land \ x \neq 2; y \neq 0]$

452 $y = \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x}$ $[x > 0 \ \land \ x \neq 1; y \neq 1]$

453 $y = \frac{\ln|x|}{|\ln x|} + \ln x$ $[x > 0 \land x \neq 1; y < -1 \lor y > 1]$

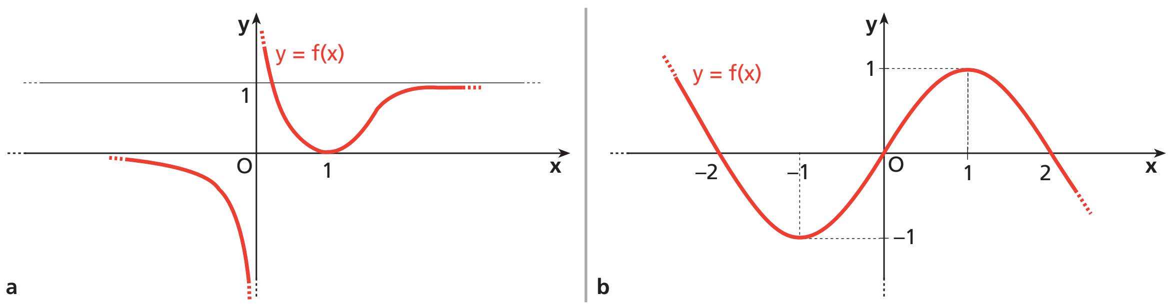
454 $y = \ln^2 x$ $[x > 0; y \geq 0]$

455 $y = 2 - \frac{1}{\log_2 x}$ $[x > 0 \ \land \ x \neq 1; y \neq 2]$

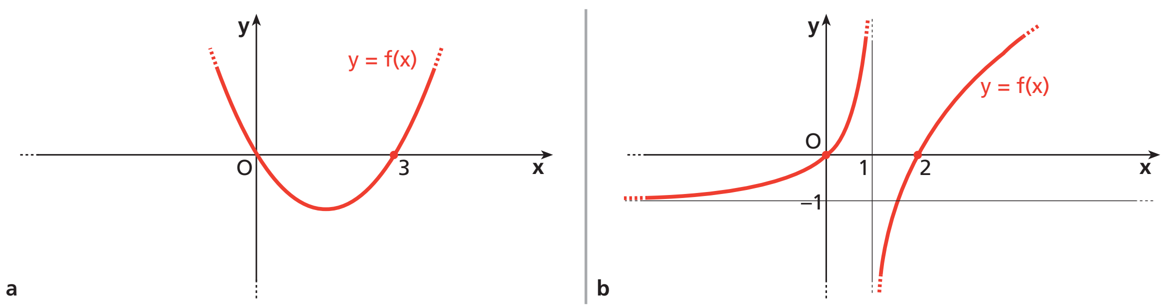
Il grafico delle funzioni del tipo $y = e^{f(x)}$

Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = e^{f(x)}$.

456



457



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = e^{f(x)}$.

458 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

459 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

460 $f(x) = x^2 - 1$

461 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

462 $f(x) = \frac{|x|}{x-2}$

463 $f(x) = \frac{1}{|x| - 2}$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

464 $y = e^{-\sqrt{x+1}}$

465 $y = e^{x^2 - 4x}$

466 $y = e^{2|x| - 4}$

467 $y = e^{|x - x^2|}$

468 $y = e^{\frac{1}{x^2 - 2x}}$

469 $y = e^{\frac{x}{2-x}}$

470 $y = e^{\sqrt{9 - x^2}}$

471 $y = e^{\frac{x-3}{|x|}}$

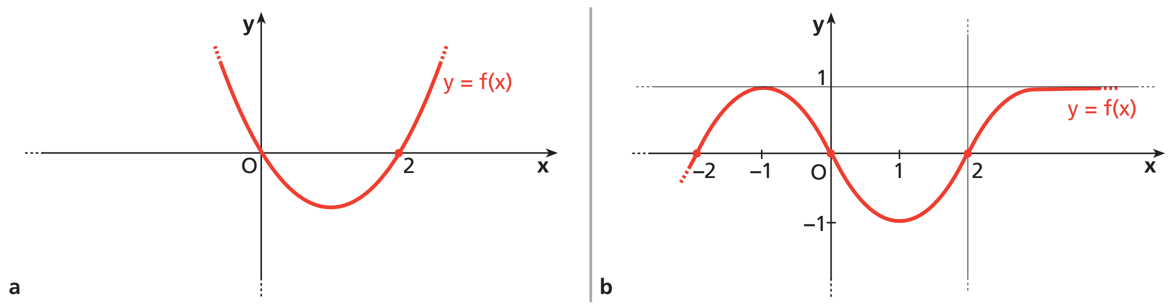
472 $y = e^{\left|\frac{1}{x-1}\right|}$

473 $y = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$

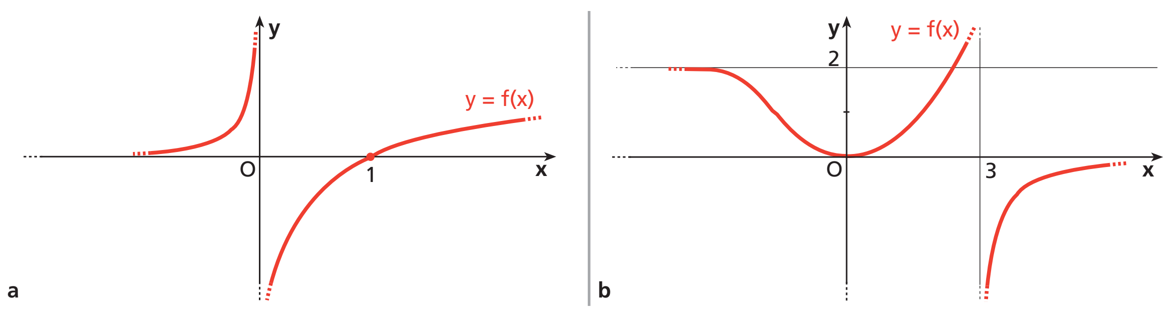
Il grafico delle funzioni del tipo $y = \ln f(x)$

Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = \ln f(x)$.

474



475



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = \ln f(x)$.

476 $f(x) = 2|x| + 1$

477 $f(x) = x^2 - 4$

478 $f(x) = \sqrt{x} - 1$

479 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$

480 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

481 $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

482 $y = \ln(2x - x^2)$

483 $y = \ln\dfrac{2x-1}{x}$

484 $y = \ln\dfrac{x}{|x-4|}$

485 $y = \ln\dfrac{1}{|x-2|}$

486 $y = \ln(-1 + \sqrt{1-x})$

487 $y = \ln[(x-1)(x-5)]$

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

Teoria a pag. 571

Riconosci le equazioni logaritmiche nei seguenti gruppi di equazioni.

488 $3x + 1 = \log 22$; $3 \cdot \log_2 x = 17$; $\log_2 5 = x + \dfrac{3}{\log_5 x}$; $\log_7 x = 2$.

489 $x^{\log 5} = 31$; $\sqrt{x - 3 - \log_5 44} = 2$; $\log_3(x^2 + 1) = x^2 + 1$; $\log_{112}(\sqrt{x}) = 2$.

490 $\log(x - 1) = \log x$; $\log(x^2 + 1) = \log x$; $\log_2 x = \log_3(x + 1)$; $\log_5 \sqrt{7} = x$.

491 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione:

$$\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - 3.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza, ricordando che gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 8 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 8 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow 2 < x < 8.$$

Risolviamo l'equazione con le proprietà dei logaritmi. Innanzitutto al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a = 1$, scriviamo:

$$3 = 3 \cdot 1 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8.$$

Sostituiamo nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi:

$$\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - \log_2 8,$$

$$\log_2\left(\frac{x-2}{8-x}\right) = \log_2 \frac{x}{8}.$$

Uguagliando gli argomenti, otteniamo l'equazione fratta:

$$\frac{x-2}{8-x} = \frac{x}{8}.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4.$$

Solo il valore $x = 4$ appartiene all'intervallo $]2; 8[$ e quindi soddisfa le condizioni di esistenza.

L'unica soluzione dell'equazione data è:

$$x = 4.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

492 $\log_{x^2}(-2x + 8) = 1$ $[x = -4 \vee x = 2]$

493 $\log_2(\sqrt{5 - x^2} - x) = 0$ $[x = 1]$

494 $\log_2 \left| |x^2 - 3| - 1 \right| = 1$ $[x = 0 \vee x = \pm\sqrt{6}]$

495 $\ln(x - 2) = 1$ $[x = e + 2]$

496 $\log_4(3x - 20) = 3$ $[x = 28]$

497 $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 3) = -2$ $[x = 6]$

498 $3\log_8(4x - 7) = -2$ $\left[x = \dfrac{29}{16}\right]$

499 $4\log_{16} x = \log_5 \dfrac{1}{125}$ $\left[x = \dfrac{1}{8}\right]$

500 $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$ $[x = 1]$

501 $\log_7(\sqrt{2x + 1} - 1) = 0$ $\left[x = \dfrac{3}{2}\right]$

502 $\dfrac{1}{3}\log(9x + 8 - x^3) = \log(2 - x)$ $[x = 0]$

503 $\dfrac{1}{2}\log_2(2x - 7) = 2 + \dfrac{1}{2}\log_2 x$ $[S = \varnothing]$

504 $\dfrac{1}{2}\log(1 - 8x) = \log(1 - \sqrt{2x})$ $\left[x = 0 \vee x = \dfrac{2}{25}\right]$

505 $\log_3|2x - 1| - \log_3 x = 0$ $\left[x = \dfrac{1}{3} \vee x = 1\right]$

506 $-2\log_4 \sqrt{6x} + \log_4(x^2 - 16) = 0$ $[x = 8]$

507 $\dfrac{2}{3}\log_4(2x - 3) = \log_8 2$ $\left[x = \dfrac{5}{2}\right]$

508 $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 6$ $[x = 2]$

509 $\log_3 5 + \log_3 2 - \log_3 x = \log_3 4$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$

510 $\log_2(2x + 11) = \log_2(x + 10)$ $[x = -1]$

511 $\log_2 x - \log_2 7 = \log_2(x - 1)$ $\left[x = \frac{7}{6}\right]$

512 $\log x - \log 3 = \log(x - 1) + \log 3$ $\left[x = \frac{9}{8}\right]$

513 $\log x - \log(x + 1) = \log 2 - \log 5$ $\left[x = \frac{2}{3}\right]$

514 $\log(x - 1) - \log(x + 2) = \log 3$ $[S = \varnothing]$

515 $\log_2 x + \log_2(x - 1) = \log_2 3x$ $[x = 4]$

516 $\dfrac{\log_5(x^2 + 1)}{\log_5[2 \cdot (x^2 - 4)]} = 1$ $[x = 3 \vee x = -3]$

517 $\log_5(x + 1) + 2\log_5 2 = \log_5 6x$ $[x = 2]$

518 $\log(3x - 1) + \log(x - 2) = \log 22$ $[x = 4]$

519 $\log(x - 1) - \log(x + 1) = \log(x - 3) - \log(x - 2)$ $[x = 5]$

520 $\log(2x + 1) - \log(x - 1) = \log(x + 4) - \log 2$ $[x = 3]$

521 $\log 7 + \log(x - 3) - \log x = \log 14 - \log(x + 1)$ $[x = 2 + \sqrt{7}]$

522 $\log_4(x^2 + 2) - \log_4(x^2 - 1) = \log_4 5 - \log_4(x + 1)$ $[S = \varnothing]$

523 $\log(2 - 3x) + \log(x + 2) = \log 5$ $\left[x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}\right]$

524 $\log_2(x^2 - 4) + 2\log_2 x = 1 + \log_2(5x^2 + 16)$ $[x = 4]$

525 $\log(5x - 2) + \log(x + 3)^2 = \log 7 + \log(x + 3) + 2\log(5x - 2)$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

526 $\log_3(x - 1) + 1 = \log_3(x + 2) + \log_3\left(x - \frac{6}{5}\right)$ $\left[x = \frac{11 + \sqrt{61}}{10}\right]$

527 $1 + \log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3 5 + \log_3 x$ $[x = 3]$

528 $\log_2(x^2 + 1) = 1 + \frac{2}{3}\log_2 x + \log_8 x$ $[x = 1]$

529 $\log(2x^2 + 5x - 3) - \log(x + 3) = \log(4 - x)$ $\left[x = \frac{5}{3}\right]$

530 $\log(10 - x^2) - \log 8 = 2\log\frac{x}{5} - 2\log\frac{\sqrt{2}}{5}$ $[x = \sqrt{2}]$

531 $\log_2(x^2 + 2x + 8) = 2 + 2\log_4(x + 2)$ $[x = 0 \vee x = 2]$

Usiamo un'incognita ausiliaria

532 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $2\log_2^2 x + 5\log_2 x - 3 = 0$.

Per l'esistenza di $\log_2 x$ deve essere $x > 0$. Poniamo poi $\log_2 x = t$ e sostituiamo nell'equazione:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

Dai due valori di t, tenendo conto dell'assegnazione, otteniamo le soluzioni dell'equazione iniziale:

$$\log_2 x = -3 \quad \to \quad x_1 = \frac{1}{8},$$
$$\log_2 x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

I valori ottenuti sono entrambi accettabili perché positivi.

Risolvi le seguenti equazioni.

533 $3\log^2 x - 2\log x = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \sqrt[3]{100}\right]$

534 $\log_4^2 x + 3\log_4 x = 4$ $\left[x = 4 \vee x = \frac{1}{256}\right]$

535 $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$ $\left[x = \sqrt[3]{3} \vee x = 3\right]$

536 $\log x - \frac{1}{2} = \log\sqrt{x}$ $[x = 10]$

537 $\frac{3}{\log x - 2} + \log x + 2 = 0$ $[x = 0{,}1 \vee x = 10]$

538 $\log_2 x^2 + \log_2^2 x = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{1}{4}\right]$

539 $\log_2^2 x^2 + 4\log_2\sqrt{x} - 2 = 0$ $\left[x = \frac{1}{2} \vee x = \sqrt{2}\right]$

540 $\log_3\sqrt{x}\,(\log_3 x + 1) - 2\log_3 x = 2$ $\left[x = \frac{1}{3} \vee x = 81\right]$

541 $(\log_2 x^2)^2 + 9\log_2 x + 2 = 0$ $\left[x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$

542 $3 = \frac{14}{\log_5 x + 2} + \frac{4}{\log_5 x - 1}$ $[x = 1 \vee x = 5^5]$

543 $2 = \log_3 x - 8\log_x 3$ $\left[x = \frac{1}{9} \vee x = 81\right]$

544 $\log_2^3 x + 6\log_2^2 x - 16\log_2 x = 0$ $\left[x = \frac{1}{256} \vee x = 1 \vee x = 4\right]$

545 $\log_3^2(x-1) = 2 + 2\log_9(x-1)$ $\left[x = \frac{4}{3} \vee x = 10\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni logaritmiche

TEST

546 Le equazioni $\log\sqrt{x} = 1$ e $\frac{1}{2}\log x = 1$ sono equivalenti?

- A Sì.
- B Solo se $x \geq 0$.
- C Sì, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- D Solo per $x < 0$.
- E No.

547 La condizione di esistenza dell'equazione $\log^2 x - 4 = 0$ è:

- A $x \geq 4$.
- B $x > 4$.
- C $x < -2 \vee x > 2$.
- D $x > 2$.
- E $x > 0$.

548 Il grafico di $y = \log(x+9)$ incontra la retta di equazione $y = 1$ nel punto di coordinate:

- A $(1; 0)$.
- B $(1; 1)$.
- C $(-8; 0)$.
- D $(-1; 1)$.
- E $(-1; 0)$.

549 L'equazione $\log_x 4 + \log_4 x = -2$ è:

- A verificata per $x = 1$.
- B impossibile.
- C verificata per $x = 4$.
- D verificata per $x = -4$.
- E verificata per $x = \frac{1}{4}$.

550 L'equazione $\log x = 2\log 2x$ è verificata per:

- A $x = 0$.
- B $x = \frac{1}{4}$.
- C $x = \frac{1}{2} \vee x = 0$.
- D $x = \frac{1}{4} \vee x = 0$.
- E $x = \frac{1}{2}$.

551 **ASSOCIA** a ciascuna equazione nella prima riga le sue soluzioni scritte nella seconda.

1) $\log_x 9 = 2$ **2)** $\log(x^2+1) = 1$ **3)** $\log_2 \frac{1}{8} = x$

a) $x = \pm 3$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = -3$

552 **ASSOCIA** a ciascuna equazione a sinistra un'equazione equivalente fra quelle scritte a destra.

1) $\log(x-1) + \log(x+1) = 1$ **a)** $\log(x^2-1) = 1$

2) $\log(x+1)(x-1) = \log 10$ **b)** $\log(1-x^2) = 1$

3) $3\log(1-x)(1+x) = 3$ **c)** $\log(x-1) = \log 10 - \log(1+x)$

553 **ASSOCIA** a ciascuna equazione la proposizione corretta.

1) $\log(2x+1) = 2\log(x-1)$ **4)** $2\log(x-2) - 2\log 2 = \log(2x-7)$

2) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$ **5)** $|\log_2 x + 3| = 5$

3) $3\log_3 x = \log_3 64$

a) L'equazione ammette come unica soluzione $x = 4$.
b) L'equazione ammette due soluzioni di cui una è $x = 4$.

554 Find the value of x in

$$\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5.$$

(IR *Leaving Certificate Examination,* Higher Level, 1995)

$[x = 6]$

Risolvi le seguenti equazioni.

555 $\log_2(x-2) + 3 = \log_2 \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\log_2 64$ $\left[x = \frac{16}{5}\right]$

556 $\frac{\log(x^2+2x-8)}{\log(x+12)} = 1$ $[x = -5 \vee x = 4]$

557 $\log 21 - \log(x+5) - \log(23-x) = -\log 7$ $[x = 2 \vee x = 16]$

558 $\log_2(3x-1) + \log_2 x = 2\log_2 x - \log_2(x+1)$ $\left[x = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right]$

559 $\log_3(x+1) = \log_3(x^2+9) - 2$ $[x = 0 \vee x = 9]$

560 $\log(5+x) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(x+3) + \log 2$ $[x = -1]$

561 $\log_3(x^2+3x-3) - 1 = \log_3(x+2) + \log_3(x-2)$ $[x = 3]$

562 $\log_2(2x+6) - \log_4(x-1) = 3$ $[x = 5]$

563 $\log_5(x^2+6x-2) = 1 + \log_5(x+2)$ $[x = 3]$

564 $1 - \frac{2}{\log_3 x + 2} = 3\log_{\frac{1}{3}} x$ $\left[x = \frac{\sqrt[3]{9}}{27} \vee x = 1\right]$

565 $\frac{1}{5}\log_5(x+1) - \log_{x+1} 5 = \frac{4}{5}$ $\left[x = -\frac{4}{5} \vee x = 3124\right]$

566 $\frac{5}{4}\log_4 x + \log_{16}\sqrt[4]{x} = \frac{11}{16}$ $[x = 2]$

567 $\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3 x$ $\left[x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

568 $\log(x-1) - 2\cdot\log(x+1) - \log 8 = -2$ $\left[x = \frac{3}{2} \vee x = 9\right]$

569 $\log 2 + \frac{1}{2}\log(x^2+5) = \log(x^2+2)$ $[x = -2 \vee x = 2]$

570 $3\log_{13}(5-x) + \log_{13} 11 = \log_{13}(x+3) + 2\log_{13}(5-x)$ $\left[x = \frac{13}{3}\right]$

571 $4\log(3-2x)-\log(4-x^2)=\log(3-2x)^3$ $[x=1-\sqrt{2}]$

572 $2\log_2 x=2+\log_2(x+3)$ $[x=6]$

573 $2\log_2\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)=\log_2(x^2-5)-2$ $[S=\varnothing]$

574 $\log_5 x+\log_5(\sqrt{5}\cdot x-4)=\frac{1}{2}$ $[x=\sqrt{5}]$

575 $\log(x+1)-\log(\sqrt{x+1})=2$ $[x=9999]$

576 $\ln x\cdot\ln x^2+\ln x^3-2=0$ $\left[x=\frac{1}{e^2}\vee x=\sqrt{e}\right]$

577 $\left|\log_2\sqrt{x+1}-1\right|=2$ $\left[x=-\frac{3}{4}\vee x=63\right]$

578 $\frac{\log_2(2x+3)}{\log_2 x}=\frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x}-1$ $\left[x=\frac{3}{2}\right]$

579 $\sqrt{\log_2 x}-8\log_2\sqrt{x}=0$ $[x=1\vee x=\sqrt[16]{2}]$

580 $\log_2\log_3(x-5)=2$ $[x=86]$

581 $6\left(\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}}x\right)+\log_3\frac{1}{x}=5$ $[x=\sqrt[11]{3^5}]$

582 $\log_3|2x^2+x|+\log_3\frac{1}{5}=1$ $\left[x=-3\vee x=\frac{5}{2}\right]$

583 $2(\log_2 x)^2+\log_2 x^5-3=0$ $\left[x=\frac{1}{8}\vee x=\sqrt{2}\right]$

584 $\log_2^2 x^2+\log_2 x=7(1-\log_2 x)-2$ $\left[x=\frac{\sqrt{2}}{8}\vee x=\sqrt{2}\right]$

585 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x+5}-\sqrt{\log_2 x-1}=2$ $[x=2]$

586 $\log_2^3 x-\frac{1}{2}\log_2^2 x^2-4\log_2 x^2=0$ $\left[x=\frac{1}{4}\vee x=1\vee x=16\right]$

587 $\frac{3\log_2 x-1}{2\log_2 x+8}=\frac{13}{40}+\frac{2\log_2 x-3}{\log_2 x^4+4}$ $\left[x=2\vee x=2^{\frac{16}{9}}\right]$

588 $\frac{\log_2 x}{\log_2 x+3}+\frac{6}{\log_2 x-3}+\frac{72}{9-\log_2^2 x}=0$ $\left[x=\frac{1}{512}\vee x=64\right]$

589 $-\log_{\frac{1}{3}}6+\log_3(x+1)=\log_3(5x)$ $[S=\varnothing]$

590 $1+\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 x}=\frac{1}{\log_2 x}$ $[S=\varnothing]$

591 $\frac{3}{\log_2 x-1}+\frac{2}{\log_2 x+1}=2$ $\left[x=8\vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

592 $\log_3(x+1)-2\log_9(x-2)=3\log_{27}x-2$ $\left[x=\frac{11+\sqrt{157}}{2}\right]$

593 $\log_3(x+1)=2\log_9(x^2+9)-2$ $[x=0\vee x=9]$

594 $\frac{3}{\ln x}+\frac{\ln x}{\ln x+1}=2+\frac{1}{\ln x}$ $[x=e^{\sqrt{2}}\vee x=e^{-\sqrt{2}}]$

595 $\frac{3}{\log_2 x(1+\log_2 x)}=2-\frac{3}{\log_2 x}$ $\left[x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\vee x=4\right]$

596 $\sqrt{\log_2^2 x+\log_2 x-2}=\log_{\frac{1}{2}}x-2$ $\left[x=\frac{1}{4}\right]$

597 $\log_{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{3^{2-x}}+3^x\right)=-1+\log_{\frac{1}{4}}(2^{x-3}+2^x)$ $[x=4]$

598 $\frac{2}{1-\log_5 x^2}-\frac{\log_5 x}{\log_5 x+3}=\frac{\log_5^2 x-10\log_5 x}{2\log_5^2 x+\log_5 x^5-3}$ $[x=5\ \vee\ x=25]$

599 $3\log_4 x-\log_4(x+1)=\log_4(x^4-81)+\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x-3)$ $[S=\varnothing]$

600 $\sqrt{10+\log_3 x^2}=5-\sqrt{10+3\log_{\frac{1}{3}}x}$ $\left[x=\frac{1}{3^5}\ \vee\ x=27\right]$

601 $3+\log x^5-2\log^2 x=(\log x+6)(\log x-1)$ $[x=10^{\sqrt{3}}\ \vee\ x=10^{-\sqrt{3}}]$

602 $\log\sqrt{|x-2|+2x}-\frac{1}{2}\log(3x+7)=0$ $[S=\varnothing]$

603 $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)+\log_3 x+\log_3(x-1)}{\log_3\frac{x}{2}}=0$ $[x=4]$

604 $2\log_4^2|x+1|+\log_4|x^2-1|+\log_{\frac{1}{4}}|x-1|-1=0$ $\left[x=-\frac{3}{4}\vee x=-\frac{5}{4}\vee x=-3\right]$

605 $\log_2^3 x+6\log_{\frac{1}{2}}^2 x+9\log_2 x+4\log_4 x+6=0$ $\left[x=\frac{1}{8}\vee x=\frac{1}{4}\vee x=\frac{1}{2}\right]$

606 $\sqrt{3+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{3+\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}}x}=\dfrac{6}{\sqrt{3+2\cdot\log_4 x}}$ $[x=1\vee x=8]$

607 $2\log_3^2\sqrt{x+5}+\log_{\frac{1}{3}}^2\sqrt{x+5}-9\log_3\sqrt{x+5}+6=0$ $[x=4\vee x=76]$

608 **TEST** Risolvi per x l'equazione $\log_4\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}+3\log_x(16x)=7$.

A 16. B 27. C 64. D 81. E 343.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

I sistemi con equazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

609 $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=2\\ x-2y=1\end{cases}$ $\left[\left(2;\frac{1}{2}\right)\right]$

610 $\begin{cases}2\log_3 x-y=1\\ \log_3 x+2y=4\end{cases}$ $\left[\left(3\sqrt[5]{3};\frac{7}{5}\right)\right]$

611 $\begin{cases}\log_3(x-y)=1\\ \log_3 x+\log_3 y=2\log_3 2\end{cases}$ $[(4;1)]$

612 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{37}{9}\\ \log_3 x+\log_3 y=\log_3 2-1\end{cases}$ $\left[\left(2;\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};2\right)\right]$

613 $\begin{cases}\log_3(2x-y)=0\\ 3^y+3^x-\frac{4}{3}=0\end{cases}$ $[(0;-1)]$

614 $\begin{cases}4\log_2 x-\log_2 y^2=4\\ \log_2 x+\log_2 y=4\end{cases}$ $[(4;4)]$

615 $\begin{cases}\log_2 x-\log_2(y+1)^2=2\\ \log_{y+1}x=1\end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)\right]$

616 $\begin{cases}3^x\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^y=27\\ \frac{1}{2}\log_2(x-y)=\log_4 x\end{cases}$ $[(3;0)]$

617 $\begin{cases}\log_{xy}12=1\\ 2^{x-4}\cdot 3^{x-1}=\frac{6^y}{8}\end{cases}$ $[(4;3)\vee(-3;-4)]$

618 $\begin{cases}\log_5(y-x)-1=2\log_5 y\\ 2x=-5^{\log_5 y}\end{cases}$ $\left[\left(-\frac{3}{20};\frac{3}{10}\right)\right]$

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

▶ Teoria a pag. 572

I due membri si possono scrivere come logaritmi di uguale base

619 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo le seguenti disequazioni:

a) $\log_{11}(2-x)>\log_{11}(x+2)$; b) $\log_{\frac{1}{5}}20x<-3$.

a) Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso} \\ & \text{di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione data sono:

$$-2<x<0.$$

b) Osserviamo che, per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere

$$-3=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{5}}5^3=\log_{\frac{1}{5}}125$$

e perciò la disequazione assume la forma:

$$\log_{\frac{1}{5}}20x<\log_{\frac{1}{5}}125.$$

Ora dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella} \\ & \text{fra i logaritmi, essendo la base minore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione assegnata sono:

$$x>\frac{25}{4}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

620 $\log_3(2-5x)>2$ $\left[x<-\frac{7}{5}\right]$

621 $\log_2(x^2-1)>3$ $[x<-3 \vee x>3]$

622 $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)>-1$ $\left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

623 $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(16-9x^2)<-2$ $[-1<x<1]$

624 $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right)<\log_5 4$ $[-2<x<2]$

625 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4+x}{2x+11}\right)<\log_{\frac{1}{5}}x$ $\left[0<x<\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right]$

626 $\log(2x-x^2)<\log(x-2)$ $[S=\varnothing]$

627 $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $[x<-1]$

628 $\log_{\frac{4}{5}}(2-x^2)-\log_{\frac{4}{5}}(1-2x)<0$ $\left[1-\sqrt{2}<x<\frac{1}{2}\right]$

Utilizziamo anche le proprietà dei logaritmi

Risolvi le seguenti disequazioni.

629 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6)-\log_{\frac{1}{4}}(x-3)>-1$ $[S=\varnothing]$

630 $\frac{1}{2}\log(-x^2+2x)<\log x$ $[1<x<2]$

631 $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{7}}(x^3+22) > \log_{\frac{1}{7}}(x+1)$ $\left[x > \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right]$

632 $\log(x+5) - \log(4-x) + \log(3x-1) > \log(3x-1) - \log(x+4)$ $\left[\frac{1}{3} < x < 4\right]$

633 $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(25-x) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5) < 0$ $[5 < x < 9]$

634 $\log\left(2+\frac{1}{x}\right) - \log\left(2-\frac{1}{x}\right) < \log(2x+1) - \log(1-2x)$ $[S = \varnothing]$

635 $\frac{1}{2}\log(6-x) - \frac{1}{2}\log(2x-5) > \log 3$ $\left[\frac{5}{2} < x < \frac{51}{19}\right]$

636 $2\log_{\sqrt{3}}(1-x) - \log_{\sqrt{3}}(3-x) < 2$ $\left[\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < 1\right]$

Usiamo un'incognita ausiliaria

637 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione $\log_2(5x-6) < 3 + \dfrac{4}{\log_2(5x-6)}$.

Introduciamo l'incognita ausiliaria $y = \log_2(5x-6)$ e sostituiamo:

$$y < 3 + \frac{4}{y} \quad \to \quad \frac{y^2-3y-4}{y} < 0.$$

Abbiamo ottenuto una disequazione algebrica fratta che ha per soluzioni:

$$y < -1 \vee 0 < y < 4.$$

Ora dobbiamo risolvere le due disequazioni logaritmiche:

$$\log_2(5x-6) < -1, \quad 0 < \log_2(5x-6) < 4.$$

- La disequazione $\log_2(5x-6) < -1$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-6 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ \log_2(5x-6) < \log_2\frac{1}{2} & \text{poiché } -1 = \log_2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 5x-6 < \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 10x < 13 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{13}{10} \end{cases}$$

Le soluzioni della prima disequazione sono: $S_1 = \left\{x \mid \frac{6}{5} < x < \frac{13}{10}\right\}$.

- La disequazione $0 < \log_2(5x-6) < 4$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-6 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ \log_2(5x-6) < \log_2 16 & \text{poiché } 4 = \log_2 16; \\ \log_2(5x-6) > \log_2 1 & \text{poiché } 0 = \log_2 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 5x-6 < 16 \\ 5x-6 > 1 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{22}{5} \\ x > \frac{7}{5} \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda disequazione sono: $S_2 = \left\{x \mid \frac{7}{5} < x < \frac{22}{5}\right\}$.

Le soluzioni della disequazione assegnata sono pertanto:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \mid \frac{6}{5} < x < \frac{13}{10} \vee \frac{7}{5} < x < \frac{22}{5}\right\}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

638 $(\log x)^2 - 7\log x + 12 < 0$ $[1000 < x < 10\,000]$

639 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{4} < x < 2\right]$

640 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 > 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 4\right]$

641 $2(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}\right]$

642 $[\log_2(x+5)]^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0$ $\left[-5 < x < -\frac{19}{4} \vee x > 3\right]$

643 $\dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} x - 1} > \dfrac{\log_{\frac{2}{3}} x}{\log_{\frac{2}{3}} x - 1}$ $\left[\frac{4}{9} < x < \frac{2}{3}\right]$

644 $3\log_5(x-4) > \dfrac{6}{\log_5(x-4)+1}$ $\left[\frac{101}{25} < x < \frac{21}{5} \vee x > 9\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni logaritmiche

TEST

645 Il dominio della funzione $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x$ è:

- **A** $[0; 1]$.
- **B** $]0; +\infty[$.
- **C** $]1; +\infty[$.
- **D** $]-\infty; 0[$.
- **E** $]0; 1[$.

646 Quale fra le seguenti disequazioni ammette come soluzioni $x > 0$?

- **A** $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0$
- **B** $\log_2(x+1) > 0$
- **C** $\log x > 10$
- **D** $\log_2 x > 0$
- **E** $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$

647 Puoi affermare che $\log_a A > \log_a B \Rightarrow A > B$ se a vale:

- **A** -1.
- **B** 0.
- **C** $\frac{2}{3}$.
- **D** $\frac{3}{2}$.
- **E** $\frac{3}{5}$.

648 La disequazione $\log x \cdot \log 2x < 0$ è verificata per:

- **A** $x > 1$.
- **B** $x > 0$.
- **C** $\frac{1}{2} < x < 1$.
- **D** $x < 0$.
- **E** $0 < x < \frac{1}{2}$.

649 **COMPLETA**

Disequazioni	a	Soluzioni
$\log_a(x-1) < 1$	2	
$\log_a(x+1) < -2$		$x > 3$
$\log_{\frac{1}{3}}(x+a) < -2$		$x > 0$

650 **ASSOCIA** a ogni disequazione le sue soluzioni.

1) $\log_2 x > 3$
2) $\log_{\sqrt{2}} x > 4$
3) $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) > \log_{\frac{1}{3}}(1-2x)$
4) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) < 1$

a) $x > 3$
b) $x < -1$
c) $x > 8$
d) $x > 4$

651 Data la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+k)>k$:

a) determina le soluzioni se $k=-1$;
b) stabilisci se per $k=0$ è equivalente alla disequazione $2\log_{\frac{1}{2}}x>0$. $[-\sqrt{3}<x<-1 \vee 1<x<\sqrt{3}; \text{no}]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

652 $\log_4(x-1)\leq -2$ $\left[1<x\leq\frac{17}{16}\right]$

653 $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)<1$ $\left[x<\frac{1}{3}\right]$

654 $\log_4(x^2+15)>3$ $[x<-7 \vee x>7]$

655 $\log_2(4x+1)>0$ $[x>0]$

656 $\log_{\frac{1}{3}}9+\log_{\frac{1}{3}}x\geq 0$ $\left[0<x\leq\frac{1}{9}\right]$

657 $\log(x^2+17x+16)<2$ $[-21<x<-16 \vee -1<x<4]$

658 $\log_{\frac{2}{3}}x^5-2\log_{\frac{2}{3}}\sqrt{x}<1$ $\left[x>\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right]$

659 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3x-2}{x+5}\right)-\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3+x}{2-x}\right)<0$ $[S=\varnothing]$

660 $\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right)^2+2\log_{\frac{1}{4}}x>\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}x$ $\left[0<x<\frac{1}{2}\vee x>64\right]$

661 $\frac{1}{\log x}-3\log x<2$ $\left[\frac{1}{10}<x<1 \vee x>\sqrt[3]{10}\right]$

662 $\log(3-x)^2-2\log(4+x)<0$ $\left[x>-\frac{1}{2}\wedge x\neq 3\right]$

663 $\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}(x+1)<\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x}+3$ $[x>3]$

664 $\log_{\frac{7}{9}}(3x-7)^2+\log_{\frac{7}{9}}(11-2x)<\log_{\frac{7}{9}}(3x-7)+\log_{\frac{7}{9}}(11-2x)^2$ $\left[\frac{18}{5}<x<\frac{11}{2}\right]$

---

665 $\log_2(\sqrt{1-x}-2)>0$ $[x<-8]$

666 $\log_2(1-|x|)>3$ $[S=\varnothing]$

667 $\sqrt{4-\log_2 x}>3$ $\left[0<x<\frac{1}{32}\right]$

668 $\log_2 x>-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$ $[x>1]$

669 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ $\left[1<x\leq\frac{3}{2}\right]$

670 $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x)-2\log_{\frac{1}{3}}(6-x)<-\log_{\frac{1}{3}}4$
$[x<-2\sqrt{3}\vee 2\sqrt{3}<x<6]$

671 $\log_2(4x+6)-\log_2(5+x)\leq 1$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq 2\right]$

672 $\log_2\sqrt{2x-x^2}<0$ $[0<x<2\wedge x\neq 1]$

673 $\frac{1}{\log_5(x-1)}<-1$ $\left[\frac{6}{5}<x<2\right]$

674 $\log_{\sqrt[3]{2}}(2x-5)-\log_{\sqrt[3]{2}}\frac{2x-5}{x+4}<3$ $[S=\varnothing]$

675 $3\log_2(2x-4)-\log_2(-x+3)>2\log_2(x-5)$
$[S=\varnothing]$

676 $\frac{1}{2}\log_x[2(1-x)]+\log_x\sqrt{x}+\frac{1}{4}\log_x x^2<2$
$[0<x<\sqrt{3}-1]$

677 $\log\log(x-1)\geq 0$ $[x\geq 11]$

678 $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\leq 1$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq\frac{\sqrt{2}-3}{2}\right]$

679 $\ln x+\frac{2}{\ln x}-3\leq 0$ $[0<x<1 \vee e\leq x\leq e^2]$

680 $3(\log_3 x+\log_x 3)\geq 10$
$[1<x\leq\sqrt[3]{3} \vee x\geq 27]$

681 $\log_2 \log_3 (x+4) > 0$ $\quad [x > -1]$

682 $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (x-6) < 0$ $\quad \left[\frac{13}{2} < x < 7\right]$

683 $\log_4 \sqrt{3x-2} - [\log_4 (3x-2)]^2 < \frac{1}{2}$ $\quad \left[x > \frac{2}{3}\right]$

684 $\log_6 \sqrt{x^2 - 2x} < \log_6 |x| - \frac{1}{2}$ $\quad \left[2 < x < \frac{12}{5}\right]$

685 $\dfrac{\sqrt[3]{\log_5 (4^{2x}+1)} - 1}{\log_{\frac{1}{4}}^2 3x - \log_4 9x^2 + 1} \leq 0$ $\quad \left[0 < x \leq \frac{1}{2}\right]$

686 $\dfrac{(4 - \log_2 x) \log_2 |x|}{\log_2 (x-2)} \geq 0$ $\quad [3 < x \leq 16]$

687 $\log^3 x - 4 \log^2 x + 4 \log x \leq 0$ $\quad [0 < x \leq 1 \vee x = 100]$

688 $\log_2 |x^2 + 2x - 3| - \log_2 (x-2) < 1$ $\quad [S = \varnothing]$

689 $\dfrac{\log_2 (x+1)}{4} > \dfrac{1}{3} \log_4 (x\sqrt{x} + 1)$ $\quad [x > 0]$

690 $\dfrac{3 \log_9^2 x + \log_{\frac{1}{9}} x^2}{\sqrt{\log_9 x^2}} \geq 0$ $\quad [x \geq 3\sqrt[3]{3}]$

691 $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|x-2|}{x} < -1 + \log_2 x$ $\quad [x > 4]$

692 $\dfrac{|\log_3 |2x+3|| - 3}{\log_3 x} > 0$ $\quad [0 < x < 1 \vee x > 12]$

693 $\log_9 (x+2) - \log_9 (x^2 - 7x + 12) \leq \log_9 \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{2}$ $\quad \left[2 < x \leq \frac{5}{2} \vee x \geq 8\right]$

694 $\sqrt{\log_3 x} - 6 \log_3 \sqrt{x} > 0$ $\quad [1 < x < \sqrt[9]{3}]$

---

695 $\dfrac{\ln^2 x^2 - 9}{3 - \ln |x|} > 0$ $\quad \left[-e^3 < x < -e^{\frac{3}{2}} \vee -e^{-\frac{3}{2}} < x < e^{-\frac{3}{2}} \vee e^{\frac{3}{2}} < x < e^3, x \neq 0\right]$

696 $\log_{\frac{3}{4}} [\sqrt{x^4 (x-1)} + 1]^2 < 0$ $\quad [x > 1]$

697 $2 \log_7 x - \log_7 |1 + x| \geq -\log_7 \left| \dfrac{1}{x^2} - 1 \right|$ $\quad [x \geq 2]$

698 $\dfrac{\log_2^2 (x-1) - 9 \log_2 (x-1) + 20}{|\log_2 (x-1)|} \leq 0$ $\quad [17 \leq x \leq 33]$

699 $\dfrac{|-2 \log x| + \log (x^2 + 1)}{2 \log x - \log (2x-5)^2} \geq 0$ $\quad \left[\frac{5}{3} < x < 5 \wedge x \neq \frac{5}{2}\right]$

700 $\dfrac{\sqrt{\log_2 \log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 4) + 1}}{\log_2 (7 - 2x) - 3 \log_8 x} \geq 0$ $\quad \left[2 < x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

I sistemi con disequazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

701 $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{x-1} < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} (x-1) < \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \left[x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

702 $\begin{cases} \log^2 x < \dfrac{2}{\log x + 1} \\ \dfrac{\log x - 1}{\log (x-1)} \leq 0 \end{cases}$ $\quad [2 < x < 10]$

703 $\begin{cases} \log_4 (x-1) + \dfrac{3}{2} < \log_2 (2x-1) \\ \log_2 \log_3 x \leq 1 \end{cases}$ $\quad \left[1 < x \leq 9 \wedge x \neq \frac{3}{2}\right]$

704 $\begin{cases} \log_3 (x^2 + 9) \leq \log_3 (x+1) + 2 \\ \dfrac{\log_3^2 x - 1}{|\log_3 x|} > 0 \end{cases}$ $\quad \left[0 < x < \frac{1}{3} \vee 3 < x \leq 9\right]$

705 $\begin{cases} \log_2 (4^x - 2) < 1 \\ \dfrac{x^2 - 4}{\log_2 x + 2} \leq 0 \end{cases}$ $\quad \left[\frac{1}{2} < x < 1\right]$

706 $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_3 \log_2 x} > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\log_2 x - 2} \geq 0 \end{cases}$ $\quad [x > 4]$

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

▶ Teoria a pag. 573

Le equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

707 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $9 \cdot 7^x = 11$.

Dividiamo entrambi i membri per 9:

$$7^x = \frac{11}{9}.$$

Dopo aver osservato che i due membri sono positivi, trasformiamo l'equazione uguagliando i logaritmi (in una base qualsiasi) del primo e del secondo membro. In questo caso conviene utilizzare la base 7:

$$\log_7 7^x = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Applichiamo la terza proprietà dei logaritmi:

$$x \log_7 7 = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Essendo $\log_7 7 = 1$:

$$x = \log_7 \frac{11}{9}.$$

Possiamo trasformare la soluzione passando ai logaritmi in base 10, in modo da calcolare un valore approssimato con la calcolatrice:

$$x = \frac{\log \frac{11}{9}}{\log 7} \simeq 0{,}1031.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

708 $5^x = 9$ $\left[x = \frac{\log 9}{\log 5}\right]$

709 $1{,}3^x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 1{,}3}\right]$

710 $1{,}3^x + 2 = 0$ $[S = \varnothing]$

711 $3 \cdot 11^x = 2$ $\left[x = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 11}\right]$

712 $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 7^x$ $\left[x = \frac{\log 3 - \log 4}{\log 5 - \log 7}\right]$

713 $\frac{7}{2^x} = 1$ $\left[x = \frac{\log 7}{\log 2}\right]$

714 $3 \cdot 2^x + 2^{x+1} = 19$ $\left[x = \frac{\log 19 - \log 5}{\log 2}\right]$

715 $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 26$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

716 $4^x = 4^{x-2} + 27$ $\left[x = 2 + \frac{2\log 3 - \log 5}{2\log 2}\right]$

717 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 15$ $\left[x = \frac{\log 30 - \log 7}{\log 2}\right]$

718 $12 - 2^{x+3} + 2^{2x} = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}\right]$

719 $7^{x+1} - 7^x + 2 \cdot 7^{x-1} = 2$ $\left[x = 1 - \frac{\log 22}{\log 7}\right]$

720 $9^x - 3^x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

721 $\sqrt[3]{7^x} = 5$ $\left[x = \frac{3\log 5}{\log 7}\right]$

722 $3^x + 20 = 9^x$ $\left[x = \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

723 $3 \cdot 5^x - \frac{12}{5^x} = 5^x$ $\left[x = \frac{\log 6}{2\log 5}\right]$

724 $5^x \cdot 2^{2x} = 10$ $\left[x = \frac{\log 5 + \log 2}{\log 5 + 2\log 2}\right]$

725 $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$ $\left[x = 2 \vee x = \frac{\log 2}{\log 3} - 1\right]$

726 $6 - 5 \cdot 3^x + (3^x)^2 = 0$ $\left[x = 1 \vee x = \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

727 $9 \cdot 2^{2x+1} - 9^2 - 4^{2x} = 0$ $\left[x = \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

728 $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $\left[x = -3 \vee x = \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

729 $\frac{2}{5^x} = \frac{3}{7^x}$ $\left[x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 7 - \log 5}\right]$

730 $3^x + 3^{x+1} = 5^x$ $\left[x = \frac{2\log 2}{\log 5 - \log 3}\right]$

731 $7 \cdot 2^x + \frac{5}{2^x} = \frac{117}{4}$ $\left[x = 2 \vee x = \frac{\log 5 - \log 28}{\log 2}\right]$

732 $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 2^{3x+1} - 2^{3x}$ $\left[x = -\frac{\log 17}{\log 3 - 3\log 2}\right]$

733 $5^x + 233 = 33(\sqrt{5^x} + 1)$ $\left[x = 4 \vee x = \frac{\log 64}{\log 5}\right]$

ESERCIZI VARI Le equazioni esponenziali

734 **TEST** Fra le seguenti equazioni esponenziali, *una sola* può essere risolta senza ricorrere all'uso dei logaritmi. Quale?

- **A** $7^{x+1} = 5^x$
- **B** $3^{x-1} = 6^{2x}$
- **C** $2^{3x-1} = 5^x$
- **D** $2^{x-1} = 4^x + 3$
- **E** $2^{2x} + 2 = 6^{1-x}$

735 **TEST** Tutte le seguenti equazioni si devono risolvere ricorrendo all'uso dei logaritmi, *tranne* una. Quale?

- **A** $2^{x-1} = 3^{x+1}$
- **B** $\sqrt[3]{4^x} = 3$
- **C** $3^{x-1} + 3 = 9$
- **D** $7 \cdot 5^{x+2} = 7^{x+1}$
- **E** $\frac{2}{4^x} = \frac{3}{6^x}$

736 **ASSOCIA** a ciascuna equazione a destra, un'equazione equivalente a sinistra.

1) $2^{x-3} - 2 = 0$ **a)** $2^{3-x} - 2 = 0$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2$ **b)** $4^{x-1} = 2$

3) $2 \cdot 2^{2x-3} = 2$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = 2$

Risolvi le seguenti equazioni.

737 $3^{\sqrt{x+2}} = 9^{\sqrt{x}}$ $\left[x = \frac{2}{3}\right]$

738 $\sqrt{3^{x+3}} = \frac{3^{2x+4}}{27^{5x}}$ $\left[x = \frac{5}{27}\right]$

739 $49^x - 13 \cdot 7^x + 36 = 0$ $[x = \log_7 9 \vee x = \log_7 4]$

740 $\frac{8^x \cdot 2}{2^{x+3}} = \frac{2^{x+1}}{2^{2x+2}}$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

741 $64 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$ $[x = -4]$

742 $6 - \frac{3 + 5^x}{5^x} = 6 \cdot 5^x$ $[S = \varnothing]$

743 $\frac{1}{2^x - 1} + \frac{2^x}{4^x - 1} = \frac{3 \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ $[x = 1]$

744 $\frac{(2^{x-2})^x}{4^{2x+1}} = \frac{(2^{2x})^{x-3}}{8^{x+4}}$ $[x = -2 \vee x = 5]$

745 $\frac{2 \cdot 25^x - 13 \cdot 5^x + 15}{5^x - 5} = 0$ $\left[x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5}\right]$

746 $6 \cdot 2^x + \frac{1}{2^x} = 5$ $\left[x = -1 \vee x = -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

747 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1} - 93 = 0$ $\left[x = 1 + \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

748 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ $\left[x = -\frac{1}{2}\right]$

749 $\frac{20 - 4^x}{5 + 4^x} = \frac{4}{5}$ $\left[x = \frac{\ln 80 - \ln 9}{\ln 4}\right]$

750 $3^x = 16 \cdot 3^{-x+1} + 2$ $\left[x = \frac{\ln 8}{\ln 3}\right]$

751 $2^{4x} - 12 = 2^{2x}$ $[x = 1]$

752 $2^{x+3} - \sqrt{2^{4+2x}} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$ $[x = 1]$

753 $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ $[x = -1 \vee x = 2]$

754 $\left(2^x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \cdot (3^x - 5) = 0$ $\left[x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

755 $3^{x+1}-2\cdot 3^x+3^{x+2}=5^{x-1}$ $\left[x=\frac{2\log 5+\log 2}{\log 5-\log 3}\right]$

756 $\frac{3^{x-2}\cdot 2^{1-x}}{6}=7^x$ $\left[x=\frac{\log_7\frac{1}{27}}{\log_7\frac{14}{3}}\right]$

757 $5\sqrt{9^{x-1}}-2^x=3^{x-1}$ $\left[\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\right]$

758 $\frac{4^{x-1}\cdot 5^x}{3^{x-3}}=4$ $\left[x=\frac{\log_3 16-3}{\log_3 20-1}\right]$

759 $3^x=6^{x-2}\cdot 3$ $[x=\log_2 12]$

760 $3^{\frac{x+1}{2}}\cdot 7^{x-1}=\frac{1}{49^x\cdot 9^x}$ $\left[x=\frac{2\ln 7-\ln 3}{5\ln 3+6\ln 7}\right]$

761 $(2^x-1)(2^x-4)=10$ $\left[x=\frac{\ln 6}{\ln 2}\right]$

762 $\frac{\sqrt[x-2]{3}}{\sqrt{3^{x+2}}}=\frac{1}{\sqrt[2x-4]{3^x}}$ $[x=3]$

763 $\frac{2^{x-3}+4}{2^{3-x}}=32$ $[x=5]$

764 $\frac{5^x-4\sqrt{5^x}+5}{\sqrt{5^{x+2}}-2\sqrt{5^x}}=\frac{2}{3}$ $[x=0\vee x=2]$

765 $\frac{2}{25^x-1}+\frac{3}{4}=\frac{2}{5^x-1}$ $[x=\log_5 3]$

766 $4^x+10^x=25^x$ $\left[x=\log_{\frac{2}{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

767 Data la funzione $f(x)=\frac{3^x}{1-3^{2x}}$:

a) determina il suo dominio;
b) dimostra che $f(x)=-f(-x)$;
c) trova per quale valore di x si ha $f(x)=-\frac{3}{8}$. [a) D: $x\neq 0$; c) 1]

768 Considera la funzione $y=2^{2x}-3\cdot 2^x$ e trova i punti di intersezione del suo grafico con l'asse x e con la retta di equazione $y=\frac{7}{4}$. $\left[(\log_2 3;0);\left(\log_2\frac{7}{2};\frac{7}{4}\right)\right]$

Le disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

769 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{7^{3+x}}{5}>4\cdot 3^{5x}.$$

Applichiamo a entrambi i membri il logaritmo in base 10. Poiché la base è maggiore di 1, si mantiene il verso nella disequazione fra logaritmi:

$$\log\frac{7^{3+x}}{5}>\log(4\cdot 3^{5x})$$

$$\log 7^{3+x}-\log 5>\log 4+\log 3^{5x}$$ II e I proprietà dei logaritmi

$$(3+x)\log 7-\log 5>2\log 2+5x\log 3$$ III proprietà dei logaritmi

$$x\log 7-5x\log 3>2\log 2+\log 5-3\log 7 \rightarrow x\cdot(\log 7-5\log 3)>2\log 2+\log 5-3\log 7.$$

Dato che $\log 7-5\log 3\simeq -1,54<0$, dividendo entrambi i membri della disequazione per questo fattore, invertiamo il verso della disequazione.
Le soluzioni sono pertanto:

$$x<\frac{2\log 2+\log 5-3\log 7}{\log 7-5\log 3}.$$

Risolvi le seguenti disequazioni usando le proprietà dei logaritmi.

770 $4^{3+x} \geq 7^{2-x}$ $\left[x \geq \frac{2\log 7 - 6\log 2}{\log 7 + 2\log 2}\right]$

771 $3^{x+1} \geq 2^{1-x}$ $\left[x \geq \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2 + \log 3}\right]$

772 $\frac{3^x \cdot 14}{3^2(2^2+3)} < 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ $\left[x < \frac{2\log 3 - \log 2}{\log 3 - \log 2}\right]$

773 $\sqrt{5^{x-1}} < 9 \cdot 3^{2x}$ $\left[x > \frac{\log 5 + 4\log 3}{\log 5 - 4\log 3}\right]$

774 $3 \cdot 5^{2-x} - 6^{1+x} < 8 \cdot 5^{2-x} - 2 \cdot 6^{1+x}$ $\left[x < \frac{3\log 5 - \log 6}{\log 6 + \log 5}\right]$

775 $5 \cdot 3^{1-x} - 2^{1+x} \geq 4 \cdot 3^{1-x} + 3 \cdot 2^{1+x}$ $\left[x \leq \frac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 + \log 2}\right]$

776 $(0,1)^x - 3 \cdot 6^x > 6^x - 8 \cdot (0,1)^x$ $\left[x < \frac{2\log 3 - 2\log 2}{\log 3 + 2\log 2 + \log 5}\right]$

777 $4 \cdot (0,3)^{2x-1} - (0,1)^{-x} \leq 5 \cdot 10^x + 0,09^x$ $\left[x \geq \frac{\log 37 - 2\log 3 - \log 2}{3 - 2\log 3}\right]$

778 $25^{x+1} - 3 \cdot 5^{2x+1} < 31 - 7 \cdot 25^x$ $\left[x < \frac{\log 31 - \log 17}{2\log 5}\right]$

779 $40 - 9 \cdot 2^x > 20 + 2^{2-x}$ $\left[\frac{\log 2 - \log 9}{\log 2} < x < 1\right]$

780 $4^x + 10 > 7 \cdot 2^x$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{\log 5}{\log 2}\right]$

781 $11^x < 18 \cdot 11^{-x} + 3$ $\left[x < \frac{\log 2 + \log 3}{\log 11}\right]$

782 $\frac{7^{x-2} \cdot 3^{1+x}}{5^{2-x}} \leq 11$ $\left[x \leq \frac{\log 11 + 2\log 7 + 2\log 5 - \log 3}{\log 7 + \log 5 + \log 3}\right]$

783 $13 \cdot 10^{2x-3} - 4 \cdot 7^{2x+1} < \frac{100^x}{1000} + 35 \cdot 7^{2x}$ $\left[x < \frac{3 + \log 3 - 2\log 2 + \log 7}{2 - 2\log 7}\right]$

784 $\frac{100^x - 2^{3-x}}{5^{2x-1} - 7^{x+1}} \leq 0$ $\left[\frac{3\log 2}{2 + \log 2} \leq x < \frac{\log 5 + \log 7}{2\log 5 - \log 7}\right]$

785 $(7^x - 1)^2 - 5 \cdot (7^x - 1) + 4 < 0$ $\left[\frac{\log 2}{\log 7} < x < \frac{\log 5}{\log 7}\right]$

786 $0,2^x \cdot (6 \cdot 0,2^x - 13) \geq -5$ $\left[x \leq \frac{\log 3 - \log 5}{\log 5} \vee x \geq \frac{\log 2}{\log 5}\right]$

ESERCIZI VARI Le disequazioni esponenziali

TEST

787 Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?

- **A** $2^x < 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **B** $4^x \geq 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **C** $6^x > 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **D** $4^x < 3^x \quad \forall x < 0$
- **E** $2^x \geq e^x \quad \forall x \geq 0$

788 La disuguaglianza $a^{f(x)} < a^{-3}$ implica $f(x) + 3 < 0$ se:

- **A** $a = 0.$
- **B** $a = \frac{3}{4}.$
- **C** $a = 1.$
- **D** $a = -2.$
- **E** $a = \frac{5}{4}.$

789 Considera le tre implicazioni:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \frac{16}{9} \rightarrow x < -1.$
2. $\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} < 0 \rightarrow x < 0.$
3. $5^x < -5 \rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}.$

Possiamo dire che:

A solo la seconda e la terza sono vere.
B solo la prima e la terza sono vere.
C solo la prima e la seconda sono false.
D sono tutte e tre false.
E sono vere tutte e tre.

790 L'insieme delle soluzioni della disequazione $3^{-2x} < \alpha$ è $\mathbb{R}^+$ se:

A $\alpha = -9.$
B $\alpha = 0.$
C $\alpha = 3.$
D $\alpha = 1.$
E $\alpha = \frac{1}{3}.$

791 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione le rispettive soluzioni.

1) $4^x + 1 > 2^{x+1}$
2) $-5^{2-x} \leq 1$
3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} \geq 0$
4) $\sqrt{3^x} - 3 < 0$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$
b) $x \neq 0$
c) $x \leq 0$
d) $x < 2$

792 **ASSOCIA** a ciascuna disequazione la relativa proposizione vera.

1) $\sqrt{2^x} + 2 < 0$
2) $\sqrt[3]{3^x} < 0$
3) $\frac{2^{3x}}{x^2+1} > 0$
4) $5^{\sqrt{x}} + 5 < 0$
5) $\frac{3^{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$

a) È verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) È impossibile.

---

793 Data la funzione $y = \log_3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 3\right]$ determina:

a) il suo dominio;
b) per quali valori di x il grafico della funzione è sopra all'asse delle ascisse. [a) D: $x < 0$; b) $x < 1 - \log_3 4$]

Risolvi le seguenti disequazioni.

794 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

795 $24 \cdot 5^x \geq 5 \cdot 6^{x+1}$ $\left[x \leq \frac{\log 5 - \log 4}{\log 5 - \log 6}\right]$

796 $\frac{3}{10^x - 2} - \frac{1}{10^x + 2} > 1 - \frac{2}{10^x + 2}$ $[\log 2 < x < \log(2 + \sqrt{12})]$

797 $\left|\left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x}\right| < 2$ $\left[x > \frac{\log 2}{\log 2 - \log 5}\right]$

798 $45 \cdot 2^{2x-2} < -35 \cdot 4^{x-1}$ $[S = \varnothing]$

799 $5^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 0$ $\left[x < \frac{\log 3}{2\log 5 + \log 3}\right]$

800 $1 - \frac{1}{4 \cdot 9^x - 4} \geq 0$ $\left[x < 0 \vee x \geq \log_9 \frac{5}{4}\right]$

801 $2^{x+5} \cdot 3^{x+2} \leq 8 \cdot 6^{\frac{3x-1}{x}}$ $[x < 0]$

802 $\frac{5^x}{25} \geq \frac{9 \cdot (3^{x-2})^{x+2}}{3^{x^2} \cdot 3^{x-4}}$ $[x \geq 2]$

803 $\dfrac{|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2}{\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 16}} \geq 0$ $[x \geq 1 \wedge x \neq 2]$

804 $\dfrac{|2^x - 4| - 2^x + 4}{5^x - 2} > 0$ $[\log_5 2 < x < 2]$

805 $\sqrt{25 - 5^x} \leq 5^x - 5$ $\left[\dfrac{\log 9}{\log 5} \leq x \leq 2\right]$

806 $\dfrac{9^{1-2x} \cdot 3^{5x-2}}{2^{x+1}} < \dfrac{7}{2 \cdot 4^x}$ $\left[x < \dfrac{\log 7}{\log 2 + \log 3}\right]$

807 $\dfrac{3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x}}{|-1 + 5^{x+1}| - 4} < 0$ $\left[x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 0\right]$

808 $\dfrac{2^x - 2}{\sqrt[3]{3 \cdot 6^x \cdot (6^x - 1)} - 6} < 0$ $\left[\dfrac{\log 2}{\log 6} < x < 1\right]$

809 $\dfrac{3^{2x+1} + 12}{9^{2x} - 2 \cdot 3^{2x} - 3} - \dfrac{9}{4 \cdot (9^x - 3)} \geq 0$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

810 $\dfrac{15^x - 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 9^x}{4^x - 4} \leq 0$ $\left[x \leq 0 \vee 1 < x \leq \dfrac{\log 5}{\log 3}\right]$

811 $\log_3(2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2^x - 3) \geq 0$ $[x > \log_2 3]$

ESERCIZI VARI Domini di funzioni con esponenziali e logaritmi

TEST

812 Quale fra le seguenti funzioni *non* ha dominio $x \neq 0$?

A $y = \log e^{\frac{1}{x}} + 1$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \log_3 |x| + 5$

D $y = 3^x + \ln x^2$

E $y = \dfrac{\ln(x+3)}{x}$

813 Quale delle seguenti funzioni ha dominio $\mathbb{R}$?

A $y = 3^{x-1}$

B $y = \log x$

C $y = \log(x^2 - 5)$

D $y = \log\sqrt{x}$

E $y = \dfrac{x+1}{\log x}$

814 Il dominio della funzione $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ è:

A $x > 2$.

B $1 < x \leq 2$.

C $x > 1$.

D $1 \leq x < 2$.

E $x \geq 2$.

815 Il dominio della funzione $y = \log_\alpha x - 1$ è:

A $x > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

B $x < 0$ se $0 < \alpha < 1$.

C $x < 1$ se $0 < \alpha < 1$.

D $x > 1$ se $\alpha > 1$.

E $x > 0$ se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$.

816 **ASSOCIA** a ciascuna funzione la relativa proposizione vera.

1) $y = \ln(x^2 + 10) - 100$

2) $y = 3^{x-1}$

3) $y = \log_2(x-3) + \log_4(2-x)$

4) $y = \dfrac{1}{2^{x-3}}$

5) $y = x^2 + \dfrac{\log x}{\ln(-x)}$

a) Il suo dominio è $\mathbb{R}$.

b) Il suo dominio è vuoto.

817 Data la funzione $y = a\log_2(3^{x-1} - 1)$, $a \in \mathbb{R}$, determina:

a) il dominio;

b) se $a < 0$, per quali valori di x la y è positiva;

c) se $a = 1$, per quale valore di x la y vale 1.

[a) D: $x > 1$; b) $1 < x < 1 + \log_3 2$; c) $x = 2$]

818 **ESERCIZIO GUIDA**

Cerchiamo il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{3}{5^{-x} - 25}$; b) $y = \dfrac{\ln x}{1 - \ln^2 x}$; c) $y = \ln(1 - e^{-2x})$; d) $y = \sqrt{4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2}$.

a) La funzione è fratta, quindi si escludono i valori di x che annullano il denominatore:

$$5^{-x} - 25 = 0.$$

Scriviamo i due membri come potenze di uguale base:

$$5^{-x} = 5^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x \neq -2.$$

b) La funzione è fratta e i suoi termini contengono un logaritmo; dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{condizione di esistenza di } \ln x; \\ 1 - \ln^2 x \neq 0 & \text{denominatore diverso da 0.} \end{cases}$$

Cerchiamo i valori che annullano il denominatore risolvendo l'equazione:

$$1 - \ln^2 x = 0.$$

Utilizziamo l'incognita ausiliaria $z = \ln x$,

$$z^2 - 1 = 0 \rightarrow z_1 = -1 \quad z_2 = 1,$$

da cui:

$$\ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1};$$

$$\ln x = 1 \rightarrow x = e.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x > 0 \wedge x \neq e^{-1} \wedge x \neq e.$$

c) Imponiamo la condizione di esistenza del logaritmo:

$$1 - e^{-2x} > 0 \rightarrow 1 > e^{-2x}.$$

Scriviamo i due membri come potenze di uguale base:

$$e^0 > e^{-2x} \rightarrow e^{-2x} < e^0.$$

Poiché la base è maggiore di 1, otteniamo una disequazione equivalente, fra gli esponenti, di uguale verso:

$$-2x < 0 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D:\ x > 0.$$

d) Abbiamo una radice di indice pari il cui radicando contiene un logaritmo; pertanto:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo;} \\ 4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice.} \end{cases}$$

Per risolvere la disequazione logaritmica utilizziamo l'incognita ausiliaria $z = \log_{\frac{1}{2}} x$:

$4 - z^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad z^2 - 4 \leq 0 \quad \rightarrow \quad -2 \leq z \leq 2.$

Sostituiamo z con $\log_{\frac{1}{2}} x$ e consideriamo il sistema equivalente alla doppia disequazione precedente:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \end{cases}$$

Poiché $0 < \frac{1}{2} < 1$, le disequazioni fra gli argomenti hanno verso contrario:

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Ritornando al sistema iniziale, troviamo il dominio della funzione con il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è dunque:

D: $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

819 $y = \sqrt{4^{x-1} - 2}$ $\left[x \geq \frac{3}{2}\right]$

820 $y = \log(2 - x) + \log(3x - x^2)$ $[0 < x < 2]$

821 $y = \frac{\sqrt{4 - x}}{\ln(2^x - 3)}$ $[\log_2 3 < x \leq 4 \wedge x \neq 2]$

822 $y = \frac{5}{6^x + 5}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

823 $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$ $[0 < x < e^{-1} \vee x > e^{-1}]$

824 $y = \sqrt{3^x - 5}$ $\left[x \geq \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

825 $y = \sqrt{\log_3 x - 2}$ $[x \geq 9]$

826 $y = \frac{2^{3x}}{8 - 2^x}$ $[x \neq 3]$

827 $y = \frac{\log x}{\ln x - 2}$ $[0 < x < e^2 \vee x > e^2]$

828 $y = \sqrt{e^{-x} - e^x}$ $[x \leq 0]$

829 $y = \sqrt{3 - \log_2(x - 1)}$ $[1 < x \leq 9]$

830 $y = \frac{7^x}{\sqrt[3]{8^x - 2}}$ $\left[x \neq \frac{1}{3}\right]$

831 $y = \frac{\ln(9 - 6x)}{\ln x - 1}$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

832 $y = \frac{1}{\log(2^x - 1)}$ $[0 < x < 1 \vee x > 1]$

833 $y = \frac{\ln x - 4}{\sqrt{4 - \ln x}}$ $[0 < x < e^4]$

834 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{-\log_2 x + 4}$ $[2 \leq x \leq 16]$

835 $y = \log_2(2^x + 2^{1-x} - 3)$ $[x < 0 \vee x > 1]$

836 $y = \frac{1}{\log^2 x - \log x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10]$

837 $y = \sqrt{\frac{3^x - 1}{3^{-x} - 3}}$ $[-1 < x \leq 0]$

838 $y = \sqrt{\frac{\ln x}{\ln x - 1}}$ $[0 < x \leq 1 \vee x > e]$

839 $y = \log(x+5) - \log(6-x) + 2$ $[-5 < x < 6]$

840 $y = \ln(|x| - 1) + 2$ $[x < -1 \vee x > 1]$

841 $y = \log(10^x + 4) - \log(10^x - 5)$ $[x > \log 5]$

842 $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{2^x - 4}$ $[x \geq 4]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu 2.0 - Esponenziali e logaritmi** © Zanichelli 2011

843 $y = \sqrt{1 - \log^2 x}$ $\left[\frac{1}{10} \leq x \leq 10\right]$

844 $y = \sqrt{2^x + 2^{1-x} - 3}$ $[x \leq 0 \vee x \geq 1]$

845 $y = \sqrt{27^x - 9 \cdot 3^{-x}}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

846 $y = \dfrac{1 - 3^x}{4^{x-2} - 2^x}$ $[x \neq 4]$

847 $y = \dfrac{\log(x-2) - 8}{(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2}$ $[2 < x < 9 \vee x > 9]$

848 $y = \sqrt{|e^x - 2| - 1}$ $[x \leq 0 \vee x \geq \ln 3]$

849 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+5)\right]$ $[-5 < x < -4]$

850 $y = \dfrac{17^x - 11^x}{5^x - 25^x + 6}$ $\left[x \neq \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

851 $y = \dfrac{13^x - 3^x}{|\log_2(5-x)| - 1}$ $\left[x < 5 \wedge x \neq \frac{9}{2} \wedge x \neq 3\right]$

852 $y = \log\left[\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| - 2\right]$ $\left[x < -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

853 $y = \log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 1)]$ $[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}]$

854 $y = \dfrac{\log(12x - 7)}{\left|7^{\frac{x}{x+1}} - 1\right| - 6}$ $\left[x > \frac{7}{12}\right]$

855 $y = e^{\frac{6}{\log_2(3+x) - 2}}$ $[-3 < x < 1 \vee x > 1]$

856 $y = \log\dfrac{x-2}{x^2 - x} + \log(x-1)$ $[x > 2]$

857 $y = \sqrt{\dfrac{\log_3 x - 2}{10^x - 10}}$ $[0 < x < 1 \vee x \geq 9]$

858 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{\log_2(x-1)}$ $[x \geq 2]$

859 $y = \log\dfrac{11^{-x} - 11^x}{13^{x+1} - 13^{-x-1}}$ $[-1 < x < 0]$

860 $y = \sqrt{2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1}$ $\left[0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; x \geq 2\right]$

861 $y = \dfrac{\sqrt{e^x - 6}}{2\ln^2 x - 3\ln x + 1}$ $[x \geq \ln 6 \;\wedge\; x \neq e]$

862 $y = \sqrt{3^{\frac{2x+7}{2-x}} - 9} - \sqrt{6^{2x+1} - 12}$ $\left[\frac{\ln 2}{2\ln 6} \leq x < 2\right]$

863 $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(1 - 2^x)}$ $[-2 \leq x < 0 \;\wedge\; x \neq -1]$

---

864 $y = \dfrac{1}{e^{2x-5} - 1} + \dfrac{1}{e - e^{-\frac{1}{x}}}$; $\quad y = \dfrac{1}{\log_2 x^2 - 4} - \dfrac{1}{2 - \log_2|x|}$. $\left[x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq \frac{5}{2};\, x \neq 0 \wedge x \neq \pm 4\right]$

865 $y = \sqrt{2 \cdot e^x + 5 - 3 \cdot e^{-x}}$; $\quad y = \sqrt{\dfrac{\ln(x^2 + 4)}{\ln(x+1) - 2}}$ $[x \geq -\ln 2;\, x > e^2 - 1]$

866 $y = \ln(1 - 2\sqrt{-x})$ $\left[-\frac{1}{4} < x \leq 0\right]$

867 $y = \sqrt{\log_2(x+1)} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 4}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{16}\right]$

868 $y = \dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}|x|}}{\log_2(3 - 2x)}$ $[-1 \leq x < 1 \wedge x \neq 0]$

869 $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_3 x$ $[x > 3]$

870 $y = \dfrac{\sqrt{9^x - 3}}{\log_3 \sqrt{|x|}}$ $\left[x \geq \frac{1}{2} \wedge x \neq 1\right]$

871 $y = \sqrt{\dfrac{3^x - 2}{\log_3 x}}$ $[0 < x \leq \log_3 2 \vee x > 1]$

872 $y = \sqrt{\dfrac{\ln(3-x) - \ln 2x}{\ln(3-x)}}$ $[0 < x \leq 1 \vee 2 < x < 3]$

873 $y = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x) - \log_{\frac{1}{2}}(1-2x)}{2^{-x} - 4}}$ $\left[x < -2 \vee 0 \leq x < \frac{1}{2}\right]$

LA RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

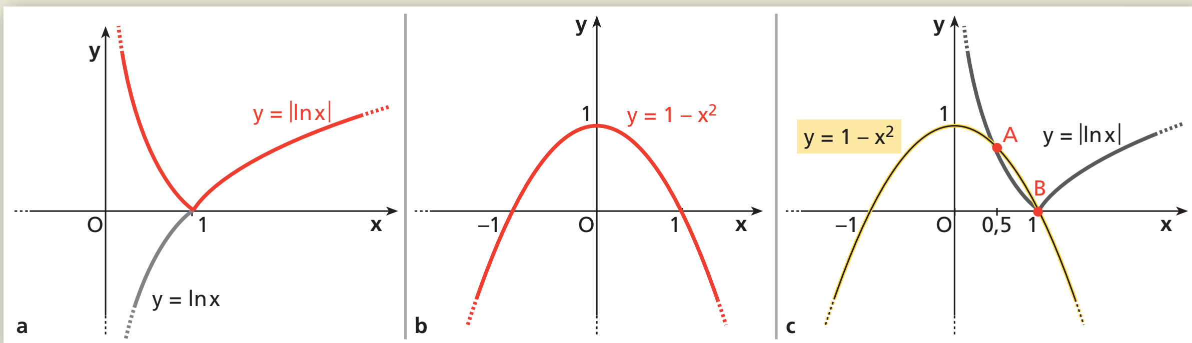
La risoluzione grafica di equazioni

874 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente equazione utilizzando il metodo grafico:

$$|\ln x| = 1 - x^2.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni di equazioni $y=|\ln x|$ e $y=1-x^2$. Consideriamo il grafico di $y=|\ln x|$ (figura *a*) e il grafico di $y=1-x^2$ (figura *b*), riportandoli in uno stesso piano cartesiano (figura *c*), e segniamo i punti di intersezione *A* e *B*.



L'ascissa di *A* è approssimativamente 0,5, mentre quella di *B* è 1.
Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 \simeq 0,5$ e $x_2 = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni utilizzando il metodo grafico.

875 $\ln x + x^2 = 4$ $[x \simeq 1,8]$

876 $\ln(x+3) + x = 10$ $[x \simeq 7,6]$

877 $\ln(x+6) - |x| = 0$ $[x_1 \simeq -1,5;\ x_2 \simeq 2,1]$

878 $\ln x = -2x + 2$ $[x = 1]$

879 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = x^2 - 4x$ $[x \simeq 4,1]$

880 $2^x - 1 = -x$ $[x = 0]$

881 $e^{-x} = \frac{x}{3}$ $[x \simeq 1]$

882 $x\log_{\frac{1}{2}} x = -1$ $[x \simeq 1,6]$

883 $\ln(x-1) - 1 = \frac{x^2}{16}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

884 $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = -\frac{2}{x}$ $[x_1 = -1;\ x_2 \simeq 2,2]$

885 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \ln(x+1)$ $[x \simeq 0,2]$

886 $2^x = |x^2 - 2|$ $[x_1 \simeq -1,5;\ x_2 \simeq -1,3;\ x_3 \simeq 0,7]$

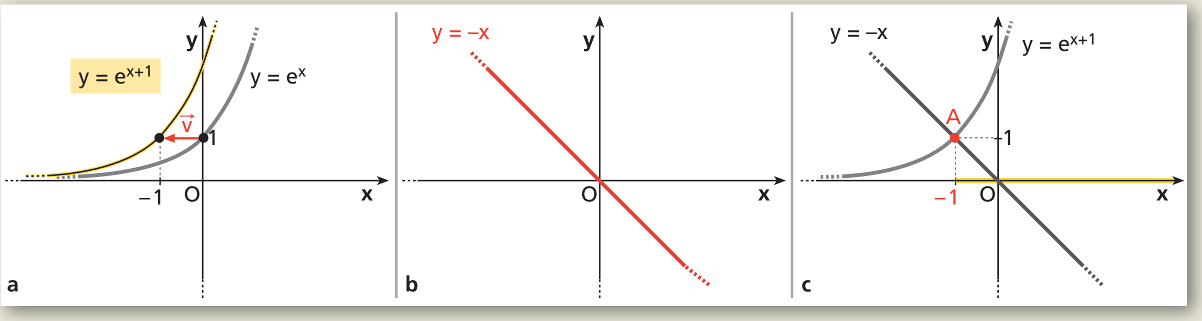
La risoluzione grafica di disequazioni

887 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione utilizzando il metodo grafico:

$$e^{x+1} > -x.$$

Consideriamo le funzioni di equazioni $y = e^{x+1}$ e $y = -x$ e disegniamo i loro grafici (figure *a* e *b*).
La disequazione ha come soluzioni tutti i valori di x per cui l'ordinata corrispondente di $y = e^{x+1}$ risulta maggiore di quella di $y = -x$ (figura *c*). L'ascissa del punto A, comune ai due grafici, è -1.



L'insieme delle soluzioni della disequazione è $x > -1$.

Risolvi le seguenti disequazioni utilizzando il metodo grafico.

888 $\log_{\frac{1}{2}} x \leq x^2 - 5$ $[x \geq 2]$

889 $2^{-x} > 2x + 1$ $[x < 0]$

890 $x < \log_{\frac{1}{3}} x + 2$ $[0 < x < a, \text{con } a \simeq 1{,}6]$

891 $\ln(x+3) > x^2 - 4$ $[-2 < x < a, \text{con } a \simeq 2{,}4]$

892 $x^2 + 1 > \ln x$ $[x > 0]$

893 $\ln(x+2) > 3^x$ $[S = \varnothing]$

894 $x^2 + 6x < 2^x + 3$
$[a < x < b \vee x > c, \text{con } a \simeq -6{,}5, b \simeq 0{,}7, c \simeq 6{,}2]$

895 $|e^{-x} - 1| \geq \ln x$ $[0 < x \leq a, \text{con } a \simeq 2{,}5]$

896 $\ln(x-1) < \dfrac{1}{x-1}$ $[1 < x < a, \text{con } a \simeq 2{,}8]$

897 $\dfrac{1}{x} > -3^{-x}$ $[x < a \vee x > 0, \text{con } a \simeq -0{,}5]$

898 $|\ln x| \geq 4 - x^2$
$[0 < x \leq a \vee x \geq b, \text{con } a \simeq 0{,}02, b \simeq 1{,}8]$

899 $xe^x - 2 > 0$ $[x > a, \text{con } a \simeq 0{,}8]$

900 $(2-x)e^x < x$ $[x > a, \text{con } a \simeq 1{,}6]$

ESERCIZI VARI Problemi

901 È data la funzione:

$$f(x) = \frac{1 - 5^{x-1}}{2(2^{x+2} - 8)}.$$

a) Determina il dominio di $f(x)$.
b) Cerca gli zeri della funzione.
c) Studia il suo segno.
d) Data la funzione $g(x) = 2^x - 2$, esprimi la funzione $y = 8f(x) \cdot g(x)$ e rappresentala graficamente.

[a) $D: x \neq 1$; b) non ci sono zeri;
c) $f(x) < 0\ \forall x \neq 1$; d) $y = 1 - 5^{x-1}, x \neq 1$]

902 È data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln^2 x - \ln x}{\ln \sqrt{x-1}}$.
a) Determina il dominio.
b) Cerca gli zeri della funzione.
c) Studia il suo segno.

[a) $D: x > 1 \wedge x \neq 2$; b) $x = e$;
c) $f(x) > 0$ per $1 < x < 2 \vee x > e$]

903 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$:
a) rappresentala graficamente;
b) disegna il grafico di $g(x) = e^{f(x)}$;
c) dimostra analiticamente che $g(x)$ è invertibile;
d) esprimi l'equazione di $g^{-1}(x)$ e rappresentala graficamente.

$\left[\text{d) } g^{-1}(x) = \dfrac{2\ln x}{1 + \ln x}\right]$

904 Considerate le funzioni

$$f(x) = |x - 2|, \quad g(x) = \log_2 x - 2,$$

a) esprimi $h = f \circ g$ e $t = g \circ f$;

b) rappresenta graficamente f, g, h e t;

c) risolvi le disequazioni: $h(x) > 1$, $t(x) > -2$.

[a) $h(x) = |\log_2 x - 4|$, $t(x) = \log_2|x - 2| - 2$; c) $0 < x < 8 \vee x > 32$; $x < 1 \vee x > 3$]

905 Data la funzione

$$f(x) = a \log_2 (x + b),$$

a) calcola a e b sapendo che il suo grafico passa per l'origine e interseca la retta di equazione $y = 4$ nel punto di ascissa 3;

b) rappresenta il grafico di $f(x)$ per i valori di a e b trovati;

c) risolvi analiticamente e graficamente la disequazione:

$$2\log_2(x + 1) \geq 3 - \log_{\frac{1}{2}} x.$$

[a) $a = 2$, $b = 1$; c) $0 < x \leq 3 - 2\sqrt{2} \vee x \geq 3 + 2\sqrt{2}$]

906 La popolazione di un certo Stato, che nel 1990 era di 8 milioni di persone, cresce del 3% all'anno secondo la legge

$$N = N_0 e^{kt},$$

dove N rappresenta la popolazione, espressa in milioni di persone, presente t anni dopo il 1990, N_0 è la popolazione iniziale nel 1990 e k è un coefficiente detto *costante di crescita*.

a) Calcola il valore di k.

b) Determina N nel 2000.

c) Indica la previsione di N nel 2020.

d) Calcola il tempo necessario per il raddoppio della popolazione.

[a) $k = \ln 1{,}03$; b) 10 751 331; c) 19 418 100; d) $t \simeq 23{,}45$ anni]

907 Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20 minuti. Sai che il numero iniziale è $N_0 = 500$.

a) Scrivi un'equazione che permetta di determinare il numero N di batteri presenti t minuti più tardi.

b) Calcola il valore di N dopo 60 minuti e dopo 27 minuti.

c) Dopo quanto tempo i batteri sono 2 350 000?

[a) $N = 500 \cdot e^{t\frac{\ln 2}{20}}$; b) $N_1 = 4000$, $N_2 \simeq 1275$, c) $t \simeq 244$ minuti]

908 In una vincita si ha la possibilità di scegliere tra:

a) 300 000 euro investiti al tasso annuale del 10% per 12 anni in capitalizzazione composta (alla fine di ogni anno viene calcolato l'interesse e sommato alla somma depositata; sulla nuova somma viene calcolato l'interesse alla fine dell'anno successivo);

b) € 0,1 messi a frutto in un conto che raddoppia la somma depositata ogni 6 mesi per i successivi 12 anni.

Quale delle due opportunità conviene scegliere e perché? [b]

909 The growth of bacteria is known to follow the law of exponential growth $N(t) = N_0 e^{kt}$. If the original size of the colony is 100 bacteria and 4 hours later it is 100,000 bacteria, how many hours after the original time will the colony number count up to 1,000,000 bacteria?

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2001)

[5h 20′]

REALTÀ E MODELLI

1

Il pH

La concentrazione molare di ioni H^+ presenti in una soluzione (indicata con $[H^+]$) varia da 1 ($=10^0$) per una soluzione di massima acidità a 10^{-14} per una soluzione di minima acidità, ovvero di massima basicità (la soluzione neutra, l'acqua pura, ha $[H^+] = 10^{-7}$).
In questa sequenza di potenze l'elemento significativo è l'esponente del 10; si definisce pertanto il pH di una soluzione come $\text{pH} = -\log [H^+]$.

- ▶ Dato il pH delle seguenti soluzioni, distingui quali sono acide, neutre o basiche: acqua di mare da 7,7 a 8,3; latte 6,5; saliva da 6,5 a 7,4; sapone da 9 a 10; succo di mela 3,5; acido cloridrico 0,3.
- ▶ Dato il pH di una soluzione, quanto vale la concentrazione di ioni H^+?
- ▶ Un aumento del pH corrisponde a un aumento oppure a una diminuzione della concentrazione $[H^+]$?
- ▶ La soluzione X ha il pH doppio della soluzione Y; cosa puoi dire della concentrazione di ioni H^+ presenti nelle due soluzioni?

2

Una popolazione batterica

La crescita dei batteri avviene per divisione cellulare, perciò in un dato intervallo di tempo (che dipende da vari fattori) raddoppia il numero dei batteri di una coltura e la legge di crescita è una funzione esponenziale in base 2. L'*Escherichia coli*, per esempio, ha un tempo di *generazione* (tempo necessario a una cellula per duplicarsi) di circa 20 minuti.
Considera una colonia di 1000 batteri *Escherichia coli*:

- ▶ calcola quanti batteri compongono la colonia dopo 4 generazioni;
- ▶ esprimi la legge di crescita in funzione del numero n di generazioni;
- ▶ determina in quanto tempo è avvenuta tale crescita;
- ▶ calcola la velocità media di crescita (variazione del numero di cellule per unità di tempo);
- ▶ da quanti batteri sarà costituita la colonia dopo 4 ore?

3

Il decadimento radioattivo

La legge del decadimento radioattivo è espressa dalla funzione $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, dove N_0 è il numero dei nuclei radioattivi presenti all'istante $t = 0$, $N(t)$ è il numero di nuclei presenti all'istante t, λ è la costante di decadimento caratteristica dell'elemento, t rappresenta il tempo (espresso in giorni).
Supponiamo che $4{,}75 \cdot 10^7$ atomi di radon si trovino nelle fondamenta di una casa; queste vengono sigillate per impedire che entri altro radon. Sapendo che la costante di decadimento del radon è $\lambda = 0{,}181$ giorni^{-1}:

- ▶ trova quanti atomi di radon rimangono nelle fondamenta dopo una settimana e dopo due settimane;
- ▶ calcola il tempo di dimezzamento del numero dei nuclei del radon.
- ▶ Se il radon iniziale fosse una quantità N_0 incognita, un mese sarebbe sufficiente per farlo scomparire?

4

L'altimetro a pressione

La pressione atmosferica, esercitata dal peso della colonna d'aria sovrastante il punto in cui viene effettuata la misura, diminuisce all'aumentare dell'altitudine. La posizione verticale di un aereo può essere così determinata mediante l'altimetro a pressione, che si basa proprio sulla variazione della pressione atmosferica in funzione dell'altitudine.

Al livello del mare la pressione atmosferica è di circa 14,7 psi (*pounds for square inch*, unità di misura anglosassone usata anche in campo aeronautico).
L'andamento della pressione P in funzione dell'altitudine h è espresso dalla funzione $P = 14{,}7 \cdot 10^{-0{,}000018h}$ (P è misurata in psi; h in *feet*, «piedi», simbolo ft).

- ▶ Qual è l'altezza di volo di un comune aereo se l'altimetro a pressione registra 13,82 psi?
- ▶ Quale pressione registra l'altimetro se un aereo si trova a viaggiare a un'altitudine di 10 000 ft?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: www.zanichellitest.it

1 Se a, b e c sono numeri reali positivi e $a \neq 1$, quale fra le seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

B $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

C $\log_a a = 1$

D $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b + c)$

E $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

2 L'intervallo $]0; 3[$ è l'insieme delle soluzioni di:

A $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} > 1.$

B $\log_2 \frac{x+3}{x} \geq 1.$

C $\log_2 \frac{x-3}{x} < 0.$

D $\log_2 \frac{x+3}{x} > 1.$

E $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} \leq 0.$

3 La disequazione $2^x + \frac{8}{2^x} > 6$:

A è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

B è verificata per $x < 1 \ \vee \ x > 2$.

C è verificata per $x < 2$.

D è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq 0$.

E non ha soluzioni.

4 Quale fra le funzioni seguenti ha come dominio $\mathbb{R} - \{0\}$?

A $y = \frac{\ln|x|}{x-1}$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \frac{1}{\ln x^2}$

D $y = \frac{\ln x}{x}$

E $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$

5 Quale fra le seguenti uguaglianze è *vera*?

A $5^{2\log_5 2} = 4$

B $\log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 1$

C $\log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 9$

D $\frac{\log_3 5}{\log_3 4} = \log_3 \frac{5}{4}$

E $\log_3 5 \cdot \log_3 4 = \log_3 20$

6 Per quali valori reali di k la funzione

$$y = ke^{x+3} + \log(x^2 + kx + 1)$$

ha dominio coincidente con $\mathbb{R}$?

A $k > 0$

B $-2 < k < 2$

C $k < 0$

D $\forall k \in \mathbb{R}$

E $k > 2$

7 L'equazione $3^{-x^2+3x} = -3^{-2x^2+x}$:

A ha due soluzioni $x = 0$ e $x = -2$.

B ha una soluzione $x = 0$.

C ha due soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$.

D non ha soluzione.

E è equivalente a $-x^2 + 3x = \frac{1}{2x^2 + x}$.

8 L'equazione $3^x + 1 = 4^{x+2}$:

A si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = \log 10$.

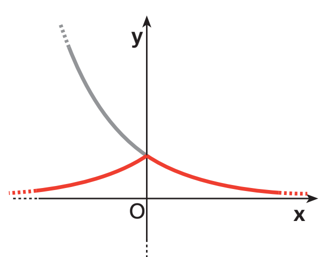
B si risolve utilizzando il metodo grafico.

C si risolve utilizzando i logaritmi e le loro proprietà.

D si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = 3^0$.

E è impossibile.

9 La seguente figura rappresenta il grafico (in rosso) di una funzione. Quale?



A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

B $y = 2^{|x|}$

C $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$

D $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

E $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

10 Sull'equazione $(a-2)^x = 3$ puoi affermare che:

A $\forall a \in \mathbb{R}$, $x = \log_{a-2} 3$.

B è impossibile.

C ammette una soluzione se $a = 2$.

D ammette soluzioni se e solo se $a \neq 3$.

E ammette una soluzione se $a > 3$.

11 La figura a lato rappresenta il grafico di una funzione. Quale?

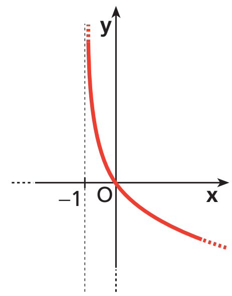
A $y = \ln(x+1)$

B $y = \log_{0,5}(x+1)$

C $y = \log_{0,5}(x-1)$

D $y = \ln(x-1)$

E $y = 1 - \log_{0,5} x$



QUESITI

Rispondi ai seguenti quesiti, supponendo che siano verificate le condizioni di esistenza dei logaritmi presenti.

12 Verifica la seguente identità: $\dfrac{\log_a x}{1+\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{1+\log_b a}$.

13 Discuti al variare di a: $\log_{\frac{2}{\sqrt{a}}} x^2 > 4$. $\left[\text{per } 0 < a < 4,\ x < -\dfrac{4}{a} \vee x > \dfrac{4}{a};\ \text{per } a > 4,\ -\dfrac{4}{a} < x < \dfrac{4}{a}\right]$

14 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4-1})$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 9)

15 Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 9)

16 Dimostra che $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$ e calcola il valore dell'espressione $\log_{\sqrt{2}} 81 + \log_{2\sqrt{2}} 3 + \log_4 9 \cdot \log_{243} 4$.

17 Risolvere la seguente disequazione in x:

$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 4)

18 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 3)

19 Indica le relazioni che esistono tra i seguenti logaritmi, motivando le risposte:

a) $\log_5 x$ e $\log_{25} x$; b) $\log_a x$ e $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}$; c) $\log_a x$ e $\log_{a^2} x$; d) $\log_a x$ e $\log_a(ax)$.

PROBLEMI

20 Data la funzione:

$$f(x) = \log_a \log_a (1 - 2x),$$

a) studia, al variare di a nell'insieme dei numeri reali, il dominio e il segno della funzione;
b) considera la funzione che si ottiene per $a = 2$ e dimostra che è strettamente decrescente nel suo dominio;
c) determina la funzione inversa $f^{-1}(x)$;
d) trova per quali valori di x è $f(x) < 2$.

[a) per $a > 1$, D: $x < 0$, $f(x) > 0$ se $x < \frac{1-a}{2}$; per $0 < a < 1$, D: $0 < x < \frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1-a}{2}$; c) $y = \frac{1-2^{2^x}}{2}$; d) $-\frac{15}{2} < x < 0$]

21 Sono date le funzioni $f(x) = \sqrt{3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2}$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$.

a) Determina il dominio D_f di $f(x)$ e il dominio D_g di $g(x)$.
b) Trova quale valore assume $f(x)$ per $x = \log_3 4$.
c) Calcola i valori di x per cui è $g(x) < -1$.
d) Considerata la funzione $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, studiane i seguenti aspetti: dominio, intersezioni del grafico con l'asse x, segno.

[a) D_f: $x \geq 0$, D_g: $\mathbb{R}$; b) 2; c) $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; d) D: $x > 0 \wedge x \neq 1$; non ci sono zeri; $y > 0$ per $0 < x < 1$]

22 Data la funzione $f(x) = \log_2(|x + a| + b)$:

a) determina a e b in modo che la funzione abbia dominio $\mathbb{R}$ e il suo grafico passi per (4; 2) e (0; 1);
b) trova i punti di intersezione con gli assi cartesiani;
c) disegna il grafico di $f(x)$ e utilizzalo per risolvere la disequazione $\sqrt{x} + \log_2(|x-1| + 1) \geq 1$.

[a) $a = -1$; $b = 1$; b) (1; 0), (0; 1); c) $x \geq 0$]

23 Data la funzione $f(x) = |4 - x^2|$, considera $g(x) = \ln f(x)$.

a) Studia il dominio, le intersezioni con gli assi e il segno di $g(x)$.
b) Rappresenta nel piano cartesiano i risultati ottenuti.
c) Disegna il grafico di $g(x)$ a partire da quello di $f(x)$ e conferma i risultati precedenti.
d) Determina i punti di intersezione del grafico di $g(x)$ con la retta di equazione $y = \ln 5$.
e) Esprimi l'equazione della funzione il cui grafico è il simmetrico del grafico di $g(x)$ rispetto alla retta precedente.

[a) D: $x \neq \pm 2$; $(0; \ln 4)$, $(\pm\sqrt{3}; 0)$, $(\pm\sqrt{5}; 0)$; $g(x) > 0$ se $x < -\sqrt{5} \vee -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \vee x > \sqrt{5}$; d) $(\pm 3; \ln 5)$; e) $y = \ln\frac{25}{|4-x^2|}$]

24 Considerata la funzione $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$,

a) determina a, b, c in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse y, passi per $\left(1; \frac{7}{2}\right)$ e $f(0) = 4$;
b) calcola per quali valori di x è $f(x) \geq \frac{9}{2}$;
c) esprimi analiticamente la funzione $g(x)$ il cui grafico è simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla retta di equazione $y = 6$; trova le intersezioni dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

[a) $a = b = -1$, $c = 6$; b) $S = \varnothing$; c) $g(x) = 2^x + 2^{-x} + 6$; non si intersecano]

25 È data la funzione:

$$f(x) = \log_{x^2-2x+1} 4.$$

a) Determina il dominio, studia il segno e cerca gli zeri della funzione.

b) Dimostra che $f(x)$ coincide con la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\log_2 |x-1|}.$$

c) Risolvi $f(x) \geq 1$. (Conviene trasformare in base 2.)

[a) $x \neq 0, 1, 2$; $f(x) > 0$ per $x < 0 \vee x > 2$; non ci sono zeri; c) $-1 \leq x < 0 \vee 2 < x \leq 3$]

26 Considera le funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2x-k) \quad \text{e} \quad g(x) = |\log_2 x - 1|.$$

a) Calcola k in modo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersechino in un punto di ascissa 4.
b) Considerando il valore di k trovato nel punto a), rappresenta graficamente le funzioni.
c) Utilizzando i grafici risolvi la disequazione

$$f(x) \geq g(x).$$

d) Scrivi l'espressione analitica della funzione

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

e) Risolvi $h(x) > 1$.

$\left[\text{a) } k = 5;\ \text{c) } x \geq 4;\ \text{d) } h(x) = \left|\log_2\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) - 1\right|;\ \text{e) } \frac{5}{2} < x < 4 \vee x > \frac{17}{2}\right]$

27 Data la funzione:

$$f(x) = 4^{x+a} + b,$$

a) determina a e b sapendo che il suo grafico passa per il punto $\left(\frac{1}{2}; 31\right)$ e che la retta di equazione

$$y = 2x + 5$$

lo interseca nel suo punto di ascissa -1;
b) rappresenta graficamente $f(x)$;
c) esprimi analiticamente $f^{-1}(x)$ e disegnane il grafico.
d) traccia il grafico di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

[a) $a = 2$, $b = -1$; c) $f^{-1}(x) = \log_4(x+1) - 2$]

Formule di algebra

Valore assoluto (modulo)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà delle potenze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$

Proprietà dei logaritmi

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad (b > 0, c > 0)$

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \qquad (b > 0, c > 0)$

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b \qquad (b > 0)$

Prodotti notevoli

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Scomposizione in fattori

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Radicali

$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

$\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} \qquad (b \neq 0)$

$\begin{cases} \text{se } m \text{ pari,} \\ a, b \geq 0 \end{cases}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a \geq 0)$

$\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a} \qquad (a > 0)$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a| & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Equazioni

Secondo grado

$ax^2 + bx + c = 0$

se $a \neq 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Biquadratica

$ax^4 + bx^2 + c = 0$,

$x^2 = z \rightarrow az^2 + bz + c = 0$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

$$|A(x)| = a \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } a < 0 \\ A(x) = \pm a & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| < k \begin{cases} \nexists \text{ soluzione} & \text{se } k < 0 \\ -k < A(x) < k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

$$|A(x)| > k \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } k < 0 \\ A(x) < -k \vee A(x) > k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

Equazioni e disequazioni irrazionali

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \begin{cases} A(x) = [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \begin{cases} A(x) < [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \begin{cases} A(x) > [B(x)]^n & \text{se } n \text{ dispari} \\ \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

$$a^x > a^y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a x > \log_a y \begin{cases} x > y & \text{se } a > 1 \\ x < y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Alfabeto greco

alfa	α	ni,nu	ν
beta	β	xi	ξ
gamma	γ	òmicron	o
delta	δ	pi	π
èpsilon	ε	ro	ρ
zeta	ζ	sigma	σ, ς
eta	η	tau	τ
teta	θ, ϑ	ipsilon	υ
iota	ι	fi	φ
cappa	κ	chi	χ
lambda	λ	psi	ψ
mi, mu	μ	omèga	ω